

## Introduzione

L'intuizione e l'astrazione, convenientemente affiancate dalla logica, sono caratteristiche fondamentali della mente umana. Tuttavia, nei processi educativi prevale normalmente l'idea che l'astrazione e le logiche disciplinari prevalgano sull'intuizione nella crescita della conoscenza scientifica degli individui. Pertanto, gli insegnanti abitualmente insistono nei tentativi di trasmettere strategie di pensiero spesso estranee al soggetto che dovrebbe elaborarle e trasformarle in conoscenza personale.

Lo scopo dei prototipi qui presentati e dei materiali che verranno sviluppati nel futuro è quello di stimolare l'uso dell'astrazione e dell'intuizione **alla ricerca di generalizzazioni partendo da situazioni concrete**. Ciò viene fatto secondo una metodologia d'uso dei materiali stessi che stimoli le facoltà personali dei soggetti e non l'impiego di strategie precostituite di pensiero.

Tipicamente, nello sviluppo del pensiero matematico accade spesso che l'individuo venga privato fin da piccolo della grande risorsa dell'intuizione personale e di strategie individuali di astrazione non coincidenti con quelle che gli vengono trasmesse. In realtà, la conoscenza individuale può solo crescere attraverso processi di costruzione soggettiva ben diversi rispetto alle strategie consolidate delle discipline e dagli schemi precostituiti tipici dell'educazione basata sulla trasmissione verbale dei concetti.

Lo scopo dei materiali qui presentati e delle modalità d'uso suggerite è quello di stimolare l'uso dell'astrazione e dell'intuizione alla ricerca di generalizzazioni secondo una metodologia che s'incentri nelle facoltà personali dei soggetti e non su strategie precostituite di pensiero.

In particolare, a scopo esemplificativo nel campo matematico, lo sviluppo di capacità di **INVENTARE TEOREMI** in netto contrasto rispetto alla tecnica usuale di **DIMOSTRARE TEOREMI** adottata nella grande maggioranza delle scuole del mondo. (Il suggerimento di INVENTARE TEOREMI proviene dal libro di Carlo Bernardini "Che cos'è una legge fisica", Editori Riuniti, Roma 1983).

L'invenzione, allo stato attuale delle cose, è riservata solo ai ricercatori, individui particolarmente dotati e capaci di adeguarsi alla cultura dominante. Essi, tuttavia, spesso hanno perso a loro volta gran parte del loro potenziale durante l'infanzia e l'adolescenza e sono anch'essi destinati a riprodurre schemi e modelli non sempre in accordo con il proprio modo di costruire ed elaborare le idee. Lo sviluppo di capacità inventive personali non solo in campo matematico, ma anche nell'approccio alle scienze, dovrebbe essere stimolato fin dall'infanzia dove il pensiero, ancora scevro da condizionamenti ed abitudini, può essere fatto crescere insieme ad un linguaggio comunicativo che rappresenti un reale progresso per la specie e non un semplice adeguamento a schemi considerati canonici. Un simile approccio avrebbe sicuramente l'effetto di far avvicinare alla conoscenza e alla passione per la matematica e le scienze un grande numero di persone mentre sappiamo che i metodi convenzionali allontanano molti individui fin dall'infanzia.

Nel progetto qui presentato il maggior difetto è che la progettazione di materiali di questo tipo per i bambini è attualmente molto limitato a causa del fatto che non siamo realmente capaci di ascoltare e capire il modo di ragionare dei bambini e a preparare situazioni nelle quali vengano stimolati a trovare regole generali al loro livello di età. La nostra mente adulta è in un certo senso rovinata dalla conoscenza strutturata da noi acquisita nella scuola convenzionale. Abbiamo bisogno di una scuola non convenzionale in cui gli insegnanti ascoltino i bambini e siano capaci a stimolare il loro pensiero con scenari aperti alla scoperta e atti ad offrire situazioni inaspettate.

Per queste ragioni e a causa della nostra difficoltà di base nella comprensione del mondo infantile, dobbiamo inizialmente creare situazioni aperte con insegnanti ed adulti con lo scopo di porre l'accento sul significato dei processi di vera scoperta. Nel frattempo, i materiali strutturati dovrebbero essere sperimentati con studenti di scuola secondaria cercando di creare le situazioni più destrutturate possibile nelle quali i giovani vengano stimolati ad inventare, a porre domande e a creare un linguaggio sempre più strutturato per comunicare fra loro.

Il lavoro con i bambini delle scuole inferiori dovrebbe per ora continuare avendo presente lo schema di riferimento della scoperta, senza usare materiali appositamente progettati, ma facendo

riferimento ad esperienze pregresse che si siano dimostrate particolarmente adatte allo scopo prefisso. Oppure, al minimo, usando in modo differente i materiali strutturati esistenti per insegnare la matematica, sebbene spesso tali materiali siano stati progettati per trasmettere concetti strutturati anziché per aiutare a strutturare il proprio modo personale di pensare. La caratteristica principale di questa proposta sta in questa apparente incoerenza tra uno spazio libero per la scoperta e la preparazione di materiali altamente strutturati per stimolare un simile spazio. Un'incoerenza apparente ma necessaria. Infatti, uno spazio di scoperta completamente libero senza alcuno scenario stimolante o di qualsiasi tipo di proposta non produce effetti. Il problema sta nel trovare un equilibrio tra il pensiero strutturato del progettista e la creazione di uno spazio realmente aperto alla scoperta. E la creazione di un simile spazio richiede una speciale attitudine da parte dell' "animatore" che propone i materiali, stimola e segue la discussione fra i partecipanti al gioco.

Infine, lo scopo di questo progetto è quello di migliorare l'apprendimento della matematica a lungo termine: quando le persone avranno costruito diversi concetti usando la scoperta personale, sarà giunto il momento per leggere i testi disciplinari e per apprendere i punti di vista ufficiali della matematica in un modo molto più semplice rispetto ai metodi tradizionali. La principale differenza sarà rappresentata dall'atteggiamento critico del lettore riguardo al significato delle parole, delle definizioni e delle assunzioni di base, spesso totalmente assenti od incomprese quando si attua un apprendimento inerte trasmettendo la disciplina.

#### Descrizione dei materiali

Per ragioni ovvie, i primi materiali preparati per stimolare l'intuizione sono di tipo geometrico. Questa scelta offre numerose occasioni per pensare in situazioni nelle quali un certo grado di manualità viene richiesto ed è più facile trovare relazioni fra il mondo concreto e quello astratto. I due materiali seguenti descrivono esempi del metodo che sono stati finora provati in un numero piuttosto limitato di occasioni fornendo risultati molto incoraggianti che danno origine al mio progetto per il futuro.

##### 1) Triangoli aperti e chiusi

Un primo esempio di generalizzazione aperto a qualsiasi gruppo di persone si attua semplicemente preparando terne di bastoncini colorati. Ciascun partecipante riceve una terna e ad ognuno viene richiesto di costruire un triangolo con i bastoncini (e non con una parte di essi). Le terne saranno state preparate in anticipo assegnando, per esempio, il colore rosso a quelle che permetteranno di formare un triangolo ed il colore blu alle altre.

L'evidente impossibilità di formare triangoli per alcuni contrasterà con la possibilità di chiuderli per altri, dando luogo ad una discussione sul significato della richiesta, la prescrizione di usare i bastoncini integralmente come lati del triangolo, dove ci si sta sbagliando, e così via ...

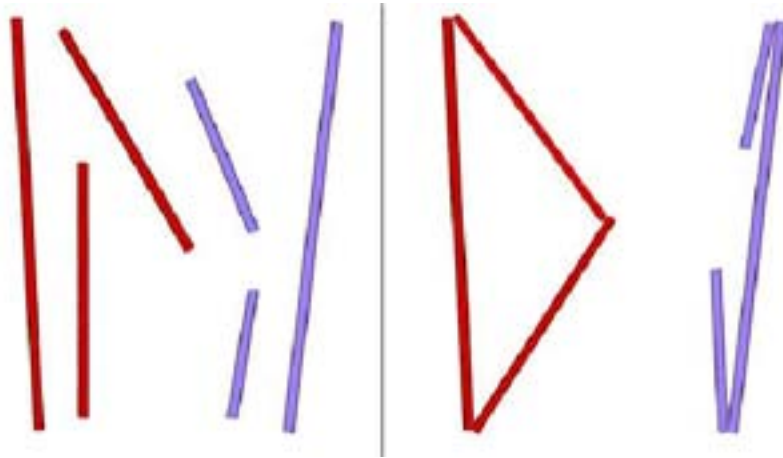
La richiesta di generalizzare viene dopo questo stadio preliminare di "costruzione" dei triangoli (coronata o meno da successo). Ai partecipanti viene chiesto di descrivere con una frase accettata da tutti la situazione osservata di triangoli che possono o non possono essere chiusi. Una regola sarà di evitare di usare espressioni e frasi basate sul ricordo di nozioni apprese a memoria ai tempi della scuola. Ad ognuno si richiede di spiegare il significato delle parole usate quando viene avanzata un'ipotesi. Infine:

- tutti dovrebbero essere d'accordo con la frase condivisa come risultato della discussione
- nessuno dovrebbe usare l'autorità per imporre il proprio punto di vista
- qualsiasi incomprensione reciproca di linguaggio dovrebbe essere chiarita
- nessun limite dovrebbe essere posto alla durata della discussione

Lo scopo di questo lavoro dovrebbe essere chiaramente espresso dalle persone che aiutano a coordinare la discussione: il problema non sta nell'apprendimento di un nuovo teorema, ma

nell'INVENTARLO dall'inizio facendo crescere le idee mediante la comunicazione, alla ricerca di un linguaggio sempre più raffinato in modo da ridurre sempre di più le contraddizioni. Seguendo questa via per inventare teoremi si favorisce la nascita di contro-esempi e si permette ai partecipanti di apprezzare il valore delle parole usate nelle definizioni date.

Figura 1



Il problema di chiudere o meno triangoli con tre segmenti dati si amplia ancora di più se si usano strisce di carta anziché bastoncini rigidi. Qui potranno sorgere discussioni riguardo alla possibilità di chiudere triangoli nello spazio anziché sul piano, aprendo lo spazio di scoperta in modi imprevedibili.

## 2) Triangoli e quadrati

Questa proposta si riferisce ad un materiale molto più complesso ideato per stimolare l'intuizione. L'idea guida è quella di offrire materiali abbastanza maneggevoli, adatti a far crescere il coinvolgimento delle persone.

Vengono preparate numerose cornici quadrate di plastica il cui lato interno è uguale alla somma dei cateti di triangoli rettangoli diversi. A ciascuna cornice si assegnano quattro triangoli rettangoli uguali. Per ciascuna misura dei triangoli dovrebbero esserci almeno due gruppi di quattro con le relative cornici con lo scopo di permettere la realizzazione di due diverse situazioni con gli stessi elementi. La versione minima di questo gioco per una sola persona sarà formata da due cornici ed otto triangoli uguali.

Ai partecipanti si chiede di sistemare quattro triangoli nella cornice in modo tale che lo spazio vuoto rimanente abbia la forma di quadrati. La fase di ricerca della struttura (o delle strutture) richiesta è eccitata e caotica, ma in un gruppo di una decina di persone vengono trovate due soluzioni diverse, che danno luogo rispettivamente ad un quadrato vuoto e a due quadrati vuoti. Poco dopo tutti sperimentano le due situazioni in diverse cornici con diversi gruppi di quattro triangoli uguali.

Nella versione più aperta della ricerca che segue la fase della "costruzione", il coordinatore della discussione non dà alcuna indicazione ed invita i partecipanti a trovare le relazioni esistenti fra gli elementi del gioco e a trovare regole generali suggerite dalle situazioni concrete osservate. Perfino la regola progettuale apparentemente semplice relativa al lato della cornice uguale alla somma dei cateti è difficile da riconoscere. Essa richiede riflessione e scoperta.

Una certa esperienza fatta con questo gioco indica che i non esperti in matematica dimostrano più intuizione degli esperti. Nella ricerca degli spazi vuoti di forma quadrata nessuno usa una tecnica sistematica, una strategia debole (ma sicura) secondo Bateson, sebbene sia autoevidente che due quadrati diversi dovrebbero essere costruiti con i cateti, mentre un quadrato più grande dovrebbe essere ottenuto con l'ipotenusa.

Gli esperti usano i termini "cateto" ed "ipotenusa", gli altri preferiscono parlare del "lato più lungo (o più corto)". Nella descrizione delle due situazioni gli esperti cercano di usare le equazioni sfuggendo alla richiesta di usare l'intuizione, gli altri hanno grosse difficoltà a comprendere le equazioni ma usano di più l'intuizione.

Alcuni chiedono con ansia quale sia la risposta “giusta” invece di pensare e di cercare di inventare ipotesi personali. Non esiste alcun vantaggio nel fornire la risposta “giusta”. Il problema non è quello di conoscere un nuovo teorema, ma di pensare su una situazione reale cercando di trovare qualche regola generale tra gli elementi della situazione. Un insegnante di Chimica, posto di fronte a questo gioco raggiunse la seguente conclusione: “Io non sono un matematico, ma secondo me gli spazi vuoti lasciati dalle due configurazioni devono essere uguali. Non so se questo sia un teorema e come si chiami, ma questo quadrato più grande deve essere uguale alla somma di questi altri due più piccoli ... Un momento ..., è il teorema di Pitagora di buona (o cattiva?) memoria della mia infanzia!

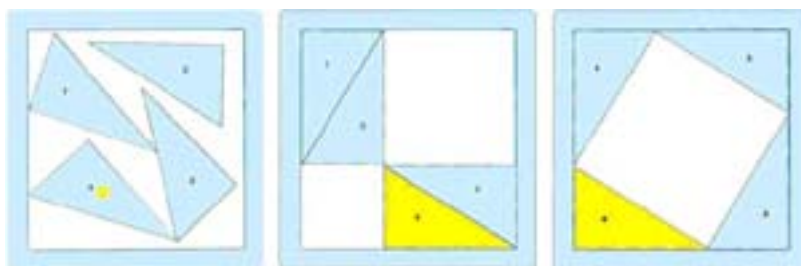


Figura 2. Quadrati e triangoli. Le due diverse configurazioni si ottengono per traslazione dei triangoli 1, 2 e 3, mentre il triangolo 4 deve essere anche ribaltato

#### Altri materiali

Il progetto ha come obiettivo la costruzione e la diffusione di materiali per stimolare l’intuizione e la crescita del pensiero matematico personale delle persone a partire dalla gioventù ma anche recuperando l’intuitività perduta degli adulti, con particolare riguardo agli insegnanti.

La geometria offre molte occasioni per sviluppare materiali strutturati da usarsi in un modo piuttosto destrutturato, come descritto negli esempi precedenti.

Un progetto si riferisce alle proprietà dei triangoli. Un triangolo acutangolo viene suddiviso in sei triangoli retti usando le tre altezze. Questi pezzi possono essere composti in modi diversi all’interno di una cornice con molti fori, in modo da ottenere un puzzle formato da 25 triangoli e 10 fori praticati nel supporto della cornice stessa.

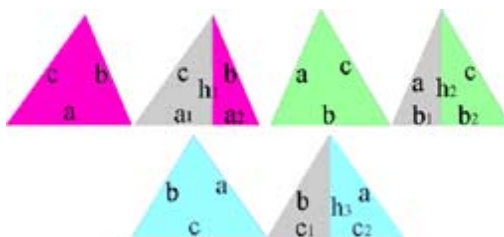


Figura 3. Tre modi diversi per rappresentare e suddividere un triangolo

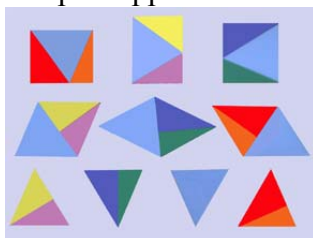


figura 4. La cornice del puzzle per la composizione dei triangoli e delle loro parti

Le persone impegnate nel gioco di completare il puzzle, per far sì che i pezzi entrino precisamente nei fori vengono stimolate a confrontare angoli, dimensioni e così via. Ciò crea uno spazio aperto alle scoperte di proprietà che vanno oltre i limiti dell’idea di partenza, basata sulle proprietà delle altezze dei triangoli e delle loro relazioni con le aree.

Materiali simili per triangoli scaleni ed ottusangoli presentano nuovi problemi e situazioni interessanti.

Un altro progetto si riferisce agli angoli che insistono su una corda di un cerchio. Numerosi triangoli con la stessa base insistono su una corda di un cerchio. Questo viene realizzato come una cornice nella quale i triangoli possono essere inseriti precisamente insieme ad un triangolo con il vertice al centro del cerchio (con un angolo che è doppio rispetto a tutti gli altri triangoli alla circonferenza).

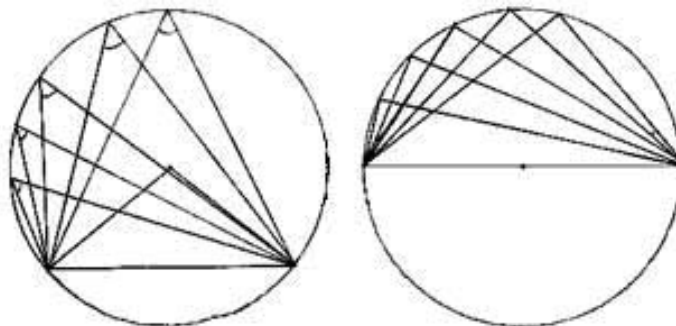


Figura 5. Angoli che insistono sulla stessa corda di un cerchio

Anche in questo caso si lascia spazio aperto alla scoperta.

Il caso particolare di triangoli rettangoli che insistono su un diametro possono aggiungere al puzzle nuovi elementi di riflessione e scoperta....

Progetti sulle proprietà dei numeri tradotte in materiali strutturati sono attualmente oggetto di studio. Per esempio, la ben nota proprietà della somma dei primi  $n$  numeri dispari che risulta uguale al quadrato di  $n$  può essere trasformata in una serie di elementi quadrati, ciascuno dei quali rappresenta l'unità, che possono essere sistemati in gruppi in modo da formare quadrati più grandi. In conseguenza, la somma dei primi 2 numeri dispari  $1+3$  forma un quadrato di 4 unità con lati  $2 \times 2$ , la somma dei primi 3 numeri dispari  $1+3+5$  forma un quadrato di 9 unità con un lato di 3 e così via... Quadrati unitari (e di altre forme!) variamente colorati possono essere usati in modo aperto ben al di là della proprietà scelta inizialmente per creare stimoli alla scoperta ed alla generalizzazione.

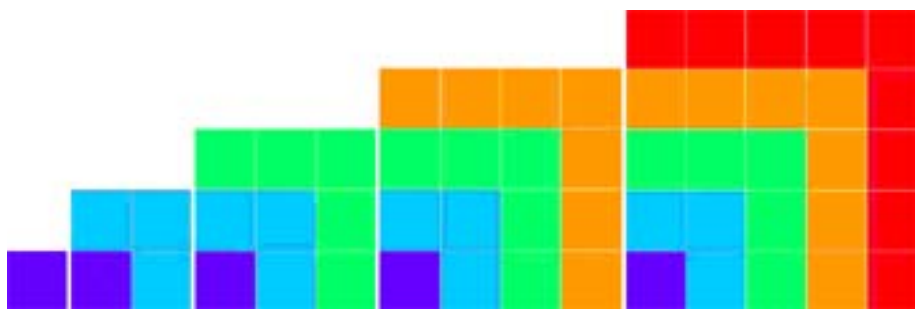
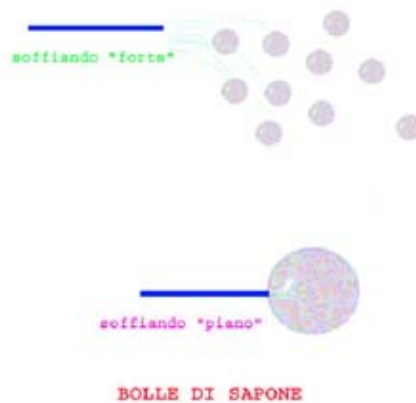


Figura 6. Una possibile rappresentazione geometrica dei numeri e delle loro proprietà

### Giochi aperti

Oltre ai materiali studiati all'interno ad uno stretto ambito matematico, giochi aperti verranno utilizzati per stimolare la discussione e la scoperta. Questo tipo di materiali è importante a tutte le età, ma è particolarmente adatto per i bambini dell'asilo che vengono meglio stimolati da situazioni concrete nelle quali la proposizione di ipotesi risulta più spontanea che con i materiali finora descritti. Alcuni esempi sono:

- Bolle di sapone di forme diverse e prodotte in condizioni diverse ( se soffi “forte” le bolle vengono più piccole, se soffi “piano” le bolle vengono più grandi...)



- Biglie di acciaio che rotolano su rotaie di varie forme (una sfera su una rotaia ricurva può essere osservata mentre scende e risale avanti ed indietro stimolando un gran numero di pensieri)



- Giocare con le parole e la loro origine (imparare a leggere cercando di interpretare il significato di parole scritte su un oggetto comune come una scatola di latte, la lunghezza delle parole in relazione alla loro importanza, ...)
- Giocare con la SCATOLA DELLE SCOPERTE, una scatola contenente vari oggetti di uso comune da scoprire poco per volta facendo inventare ai bambini storie comprendenti questi oggetti e immaginare loro possibili usi ed applicazioni

Gli animatori.

Le domande da porre inizialmente ed il modo di condurre la discussione da parte degli “animatori” sono cruciali per gli scopi finali del progetto, che viene ideato per sostenere e promuovere il pensiero intuitivo. Perciò, la formazione degli “animatori” è un passo cruciale di questo progetto.

Un animatore è visto come una persona abile che aiuta le persone a discutere senza essere sottoposte alla paura di dare risposte errate o sotto l’impressione di cercare una “verità” che si trova nella mente del coordinatore della discussione. Un animatore incoraggia tutti gli interventi senza preferirne uno rispetto agli altri anche se egli sta pensando per proprio conto che qualche ipotesi è migliore di altre. Egli deve essere neutrale ed ascoltare le persone. Egli chiarisce che non esiste una risposta ufficiale alle domande che pone e che i partecipanti alla discussione dovrebbero dare risposte concordate. Perciò, l’abilità maggiore dell’animatore sta nel suo modo di comportarsi. La conduzione di una discussione costruttivista richiede preparazione ed esperienza. La cosa più facile per un insegnante è presentare risposte disciplinari ai problemi. Egli deve solo sapere le risposte “giuste”. Al contrario, un animatore, anche se esperto in matematica, deve essere capace di assumere un comportamento neutrale senza imporre un punto di vista disciplinare. Ciò implica libertà di ricerca che, peraltro, richiede stimoli provenienti dalla qualità dei materiali e dalle qualità

dell'animatore. La formazione degli animatori può essere fatta aprendo discussioni fra loro sotto la guida di un insegnante costruttivista esperto già formato come animatore. Lo stadio iniziale di questi corsi di formazione verrà realizzato dal responsabile di questo progetto e dai suoi collaboratori con lo scopo di formare un gruppo selezionato di formatori di animatori.

Caratteristiche del progetto.

Per raggiungere gli ambiziosi traguardi di questo progetto, si dovrebbero considerare diversi aspetti:

- Preparazione dei materiali in un numero di copie adatte per una sperimentazione da condurre da diversi gruppi in situazioni differenti, diciamo una cinquantina di copie distribuite inizialmente a persone consapevoli dei fini di questi materiali. Nel seguito il numero di copie potrebbe crescere a richiesta.
- Formazione degli animatori dei materiali (nel primo stadio, principalmente insegnanti di scuola secondaria, ma anche insegnanti elementari seguiti dal responsabile di questo progetto e suoi collaboratori)
- Sperimentazione e controllo dei materiali nel Centro "Idee e Materie in Gioco" e in altre sedi (principalmente scuole)
- Analisi e valutazione dei risultati ottenuti con adulti e giovani
- Progettazione di materiali di nuova concezione adattati ai risultati delle esperienze
- Preparazione di materiali scritti ed informatici per dare pubblicità all'iniziativa
- Creazione di un gruppo internazionale d'interesse sulla matematica ingenua ed il pensiero intuitivo
- Ricerca a livello mondiale della letteratura esistente sull'uso dei materiali strutturati per insegnare la matematica e ricerca sulla possibilità di utilizzarli ai fini del presente progetto
- Creazione di un collegamento fra il pensiero matematico e le altre discipline scientifiche per un processo educativo unitario (ciò anche in vista delle generalizzazioni adatte per i bambini della scuola dell'infanzia)
- .....

Scala dei tempi

- La prima fase del progetto, cioè la preparazione dei materiali e la formazione degli animatori durerà 6 mesi (a partire da Settembre 2005). Durante questo periodo, tuttavia, la formazione degli animatori verrà attuata presso il Centro "Idee e Materie in Gioco" del quale M. De Paz è responsabile. I materiali verranno preparati presso il Dipartimento di Fisica dove esiste una moderna officina meccanica con numerosi tecnici specializzati. In questa officina nel 1997, sotto la responsabilità del proponente, furono costruiti molti dei giochi-esperimenti presentati con successo e tuttora funzionanti in un modulo della "Città dei Bambini" al Porto Antico di Genova.
- La fase di esperimenti sul campo inizierà quasi subito, non appena saranno pronti i primi materiali e verrà attuata nelle scuole per nove mesi dagli stessi esperti che fanno parte di IMG e che condurranno la formazione degli animatori (Ottobre 2005-Giugno 2006). Durante questo periodo verranno preparati nuovi materiali o modificati sulla base della valutazione dell'esito degli esperimenti e di eventuali richieste. Si darà inizio ad un gruppo internazionale sulla matematica ingenua. Si preparerà una pagina web. A partire da febbraio 2006 si terrà il secondo corso di formazione degli animatori.

- *Una terza fase della durata di un anno (Giugno 2006- Giugno 2007) coinvolgerà più scuole a Genova e altrove.*
- *Si preparerà un simposio nazionale sul soggetto dell'intuizione ed il pensiero matematico (Giugno 2007 – Dicembre 2007)*
- *A questo punto, si spera che il progetto continui ad espandersi nel nostro paese ed all'estero prendendo spunto da contributi esterni di fondi e di idee. Ci vorrà un periodo di 12 mesi per scrivere un libro sui risultati ottenuti col progetto e per tenere una conferenza internazionale sul soggetto (Dicembre 2007 - Dicembre 2008)*

Il progetto è pluriennale, ma s'intende sperimentarlo per il primo anno utilizzando i fondi già disponibili e quelli che verranno devoluti nel seguito.