Funzione potenziale e energia potenziale elettrica 1

Possibilità di definire una funzione potenziale- campi conservativi

Prima di parlare della funzione potenziale in un campo elettrico o della energia potenziale in un campo elettrico vediamo alcuni problemi connessi con la possibilità di definire la funzione potenziale in genere.

Prendiamo il campo gravitazionale $\vec{g}$. In genere siamo abituati ad associare ad un corpo m messo ad un'altezza h dal suolo una energia potenziale gravitazionale mgh . E per andare da una altezza h_2 ad un'altezza h_1 ho una variazione di energia potenziale gravitazionale data da:

$$\Delta W = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1)$$

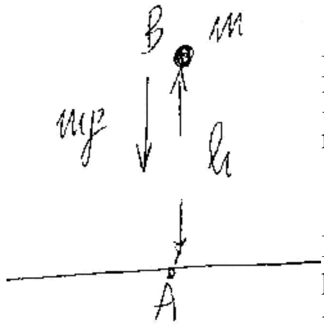
In realtà osservate bene che l'unica cosa che posso determinare fisicamente è la trasformazione di energia che avviene, quindi posso determinare sperimentalmente solo ΔW . Mi accorgo che c'è stata la variazione di energia potenziale solo perché mi è apparsa energia cinetica, o calore o chissà cos'altro. Se h_1 e h_2 fossero diverse ma la loro differenza fosse sempre quella di partenza non potrei in nessun modo accorgermene.

Quello che ha senso fisico è solo la differenza di energia potenziale, non l'energia potenziale in assoluto (che risulta definita a meno di una costante additiva...).

Ma posso sempre definire una energia potenziale?

Osserviamo il meccanismo con il quale siamo arrivati alla definizione.

fig 1



Per andare da A a B in figura lungo la traiettoria 1 devo compiere io un lavoro contro la forza di gravità, che supponiamo costante, spostando la massa m di Δh . Il lavoro che io faccio è dunque:

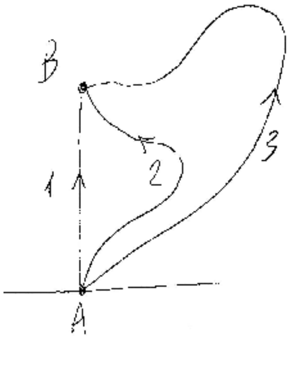
$$L = \vec{F} * \vec{s} = Fs\cos\alpha = -Fs$$

Il segno meno è dovuto al fatto che il vettore $\vec{F}$ e lo spostamento $\vec{s}$ hanno stessa direzione ma verso opposto: la forza di gravità è rivolta verso il basso e lo spostamento che effettuo verso l'alto. Allora l'angolo α formato dai due è 180^0 e il coseno vale -1.

Ricorriamo sempre al significato fisico per capire: il lavoro è negativo perché io sto fornendo energia la corpo e quindi io perdo energia.

Il corpo ovviamente acquista una energia, positiva, pari al lavoro che io ho fornito.

E fin qui tutto bene. Ma quanto vale il lavoro che io faccio lungo la traiettoria 2? O lungo la traiettoria 3?



Apparentemente sono diversi, perché diverso è il cammino, ovvero il modo in cui io fornisco lavoro al corpo. Ma se sono diversi sono nei guai: avrei una energia potenziale diversa, all'altezza h_2 a seconda del cammino percorso. Allora non avrei più una funzione della sola altezza ma una funzione dell'altezza e della traiettoria Γ percorsa. Ovvero non sarebbe più

$$W = f(h)$$

ma sarebbe

$W = f(h, \Gamma)$

Cosa dice la formula che sappiamo praticamente a memoria? Dice che

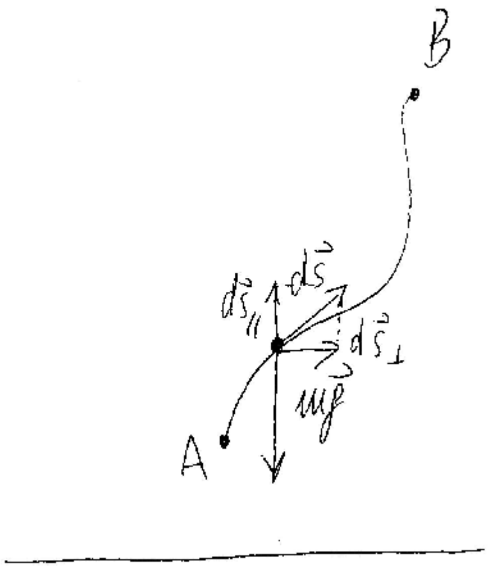
$W = mgh = f(h)$

Perché m è costante e g è costante.

Cioè io ho definito, a meno di una costante additiva, una energia potenziale che dipende solo dalla altezza come variabile e non dal percorso.

Come è potuto avvenire ciò?

Guardiamo la figura



Andiamo da A a B secondo la curva Γ qualunque. Non posso più parlare di lavoro totale in modo semplice, perché è vero che il campo vettoriale $\vec{g}$ è uniforme, ma lo spostamento è lungo una curva qualsiasi, varia da punto a punto la sua direzione e il suo verso.

Ricorriamo allora al trucco degli infinitesimi. Scompongo la traiettoria Γ in tanti tratti infinitesimi rettilinei $\vec{dS}$. La somma di tutti i dS infinitesimi mi da' ovviamente la curva Γ. Allora se io non posso parlare di lavoro totale subito però posso definire il lavoro infinitesimo fatto spostando $\vec{g}$ di un tratto infinitesimo $\vec{dS}$:

$dL = m\vec{g} * \vec{dS}$

Ma posso pensare il vettore spostamento infinitesimo scomposto in due vettori: uno parallelo a $\vec{g}$ e l'altro perpendicolare a $\vec{g}$:

$\vec{dS} = \vec{d}\,S_{perpendicolare} + \vec{d}\,S_{parallelo}$

Allora:

$dL = m\vec{g} * \vec{dS} = m\vec{g} * \vec{d}\,S_{parallelo} + m\vec{g} * \vec{d}\,S_{perpendicolare}$

Ma

$m\vec{g} * \vec{d}\,S_{perpendicolare} = 0$ perché il coseno è zero (sono perpendicolari fra di loro, l'angolo è 90^0, il coseno è zero)

Allora:

$dL = m\vec{g} * \vec{d}\,S_{parallelo}$

che diventa semplicemente, facendo il prodotto scalare e ricordando che questa volta il coseno è -1:

$dL = -m\,g\,dS_{parallelo}$

Faccio adesso la somma infinita di tutti i lavori infinitesimi:

$L = \int_{\Gamma} dL = \int_{\Gamma} mg\,dS$

Ma g è costante (il campo è uniforme nella ipotesi che abbiamo fatto di essere vicini alla superficie terrestre) e quindi lo posso portare fuori dal segno di integrale.

Quindi:

$L = mg\int_{\Gamma} dS = mg(h_2 - h_1)$ perché la somma di tutti gli spostamenti infinitesimi paralleli al vettore g non è altro che la differenza fra h_2 e h_1

Cosa abbiamo ottenuto? Abbiamo ottenuto che il lavoro fatto per andare da A a B non dipende dal percorso, ma solo dalle altezze dei punti A e B. Cerchiamo di capire il punto chiave della dimostrazione. Il punto chiave sta nel fatto che il campo $\vec{g}$ è un campo radiale, nello specifico il centro è all'infinito, ma il conto varrebbe lo stesso se si pensasse al campo gravitazionale radiale generato dalla massa M della terra concentrata nel suo centro di massa. Se il campo non era radiale non potevo dire che il prodotto della forza per lo spostamento perpendicolare era zero e quindi avrei introdotto grande complicazione nei calcoli.

Allora vuol dire che in un campo di forze radiale il lavoro fatto per andare da un punto A a un punto B lungo una qualunque traiettoria NON dipende dalla traiettoria ma solo dalla posizione iniziale A e dalla posizione finale di B

Allora vuol dire che qualunque traiettoria faccia io fornisco al corpo di massa m sempre lo stesso lavoro, e quindi l'energia potenziale del punto B sarà la stessa qualunque sia la traiettoria fatta.

In questo caso posso definire una funzione energia potenziale univoca che è funzione solo dell'altezza.

Generalizziamo il concetto:

In un qualunque campo di forze radiale è possibile definire una funzione potenziale univoca e una energia potenziale univoca.

Un'altra possibile definizione assolutamente equivalente è questa:

Il lavoro fatto lungo una curva chiusa in un campo di forze radiale è zero. Il campo allora si dice conservativo.

Un campo di forze è conservativo quando il lavoro fatto per andare da un punto allo stesso punto è zero.

In un campo di forze conservativo è possibile definire una funzione potenziale e una energia potenziale che siano funzione univoca della sola posizione.

(vi è anche un'altra possibile definizione: il campo conservativo è irrotazionale. Pensate ad esempio ad un campo non radiale come in figura. Se io faccio una linea chiusa Γ il lavoro compiuto lungo la linea chiusa non può essere zero. Pensate ad esempio a una curva Γ che coincida con una linea del campo non radiale in figura... allora formalmente dico che il rotore del campo è zero, nel caso specifico scrivo che $rot\,\vec{g}=0$, ma questa è un'altra storia...)