Funzione potenziale e energia potenziale elettrica 2

Il campo elettrico $\vec{E}$ ha le stesse caratteristiche, dal punto di vista dei vettori, del campo gravitazionale $\vec{g}$:

- è un campo radiale
- varia proporzionalmente a $\frac{1}{r^2}$
- è addittivo

Queste tre proprietà le abbiamo ampiamente studiate, non c'è problema in queste proprietà. Abbiamo già visto che il teorema di Gauss discende direttamente dal fatto che è proporzionale a $\frac{1}{r^2}$. E abbiamo visto nella dispensa precedente che il campo gravitazionale $\vec{g}$ ammette una funzione potenziale e una energia potenziale gravitazionale e che questa proprietà discendeva direttamente dal fatto che il campo gravitazionale di una massa considerata puntiforme era radiale.

Allora sicuramente il campo elettrico $\vec{E}$, che ha le stesse caratteristiche del campo gravitazionale ammetterà l'esistenza di una funzione potenziale elettrico e una energia potenziale elettrica.

Il campo elettrico, per il fatto di essere radiale, sarà conservativo, sarà irrotazionale ecc.

La complicazione nasce dal fatto che le cariche elettriche possono essere sia positive che negative e quindi richiederà attenzione ai segni. Vedremo che ricorrendo all'intuito fisico possiamo memorizzare assai bene il problema. Poi il campo elettrico sarà espresso in forma leggermente diversa (ma gli studiosi potranno facilmente dimostrare che è formalmente identica...) e in più non saremo nella approssimazione di campo elettrico uniforme, come prima eravamo nell'approssimazione di campo gravitazionale uniforme. ma le differenze, dal punto di vista formale, saranno tutte qua.

Brevissimo rappel: in natura tutti i corpi si muovono da una situazione ad energia potenziale alta ad una situazione con energia potenziale bassa. Pensate a una pallina dentro una ciotola. Se io la sposto lungo una parete e la lascio andare questa torna velocemente verso il fondo della ciotola, poi non riesce a fermarsi e incomincia ad oscillare, perde energia per attriti e si ferma. Dove si ferma? Nel fondo della ciotola. Nel campo gravitazionale terrestre il fondo della ciotola corrisponde al minimo di energia potenziale gravitazionale e il bordo della ciotola corrisponde al massimo di energia potenziale gravitazionale. Incidentalmente la posizione di equilibrio stabile corrisponde alla situazione di minima energia potenziale gravitazionale.

Se io prendo orizzontalmente (perché orizzontalmente? vai con gli studiosi...) una molla con un peso, questa se è ferma è in una situazione di minima energia potenziale elastica. Adesso la sposto dalla sua posizione di equilibrio, sento una forza di richiamo data dalla legge di Hook, faccio un lavoro ovvero fornisco energia potenziale elastica alla molla. Se la lascio andare la molla con il suo pesetto cercherà di ritornare da una situazione ad alta energia potenziale elastica alla situazione con minima energia potenziale elastica, arriva nella posizione di equilibrio, non si può fermare perché ha acquisito energia cinetica e va dall'altra parte: oscilla.

Ma questo non è vero solo in meccanica: è una legge di natura. I corpi si mettono sempre, se possono, nella situazione di minima energia potenziale (sia essa gravitazionale, elettrica, elastica ecc. ecc.).

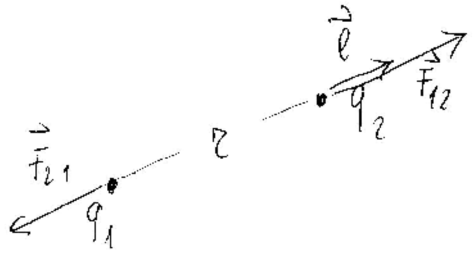
Per fissare le idee (si dice così ed è ... subito nebbia) prendiamo in considerazione due cariche positive q_1 e q_2 a una certa distanza r e sviluppiamo i conti nella colonna di sinistra. Poi prendiamo una sola carica positiva q e sviluppiamo i conti nella colonna di destra.

Il lavoro, la legge di Coulomb e l'energia potenziale elettrica

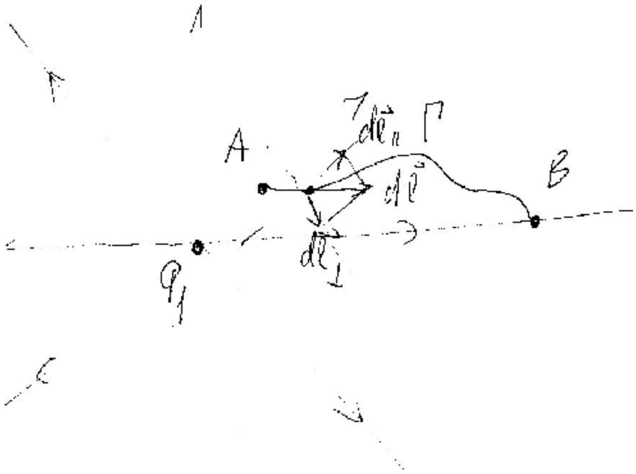
Due cariche positive q_1 e q_2 poste alla distanza r come in figura.
Tra di esse si esercita una forza di attrazione coulombiana il cui modulo è dato da:

$$F=\frac{kq_1 q_2}{r^2}$$

Adesso attenzione ai segni: dobbiamo scegliere arbitrariamente il versore. Scegliamo come versore $\vec{e}$



Allora precisiamo i segni vari: Il modulo $|\vec{F}_{21}|$ è uguale al modulo $|\vec{F}_{12}|$ ma $\vec{F}_{12}$ è positiva, perché diretta secondo il versore $\vec{e}$ scelto, mentre $\vec{F}_{21}$ risulta negativa perché ha il verso opposto al versore scelto. Non impasticciatevi troppo e soprattutto cercate di non ricordare a memoria quello che sto scrivendo, seguite il ragionamento e vedrete che i segni e la vita andranno a posto da soli (o quasi...).
Il lavoro è dato da forza per spostamento. Prendiamo la figura qui sotto e cerchiamo di andare da un punto A a un punto B, spostando la carica positiva q_2 lungo una traiettoria qualsiasi Γ.



Il lavoro è dato da:

$$L=\vec{F}*\vec{S}$$

Ma nel nostro caso abbiamo una forza che è variabile da punto a punto e il vettore spostamento è variabile in direzione e verso da punto a punto. E' evidente che non posso considerare il campo elettrico come uniforme come facevo (per approssimazione, in realtà) con il campo gravitazionale.
Introduco quindi, come già fatto per il teorema di Gauss il concetto di infinitesimo. Nel nostro caso prendo uno spostamento infinitesimo

$$\vec{dl}$$

Il lavoro unitario, il campo elettrico e la funzione potenziale elettrica

Poiché il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$$

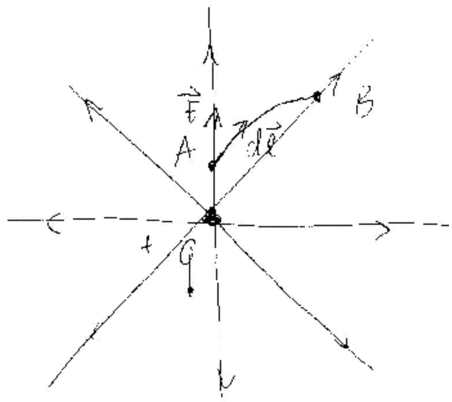
Le dimensioni di:

$$\vec{E}*\vec{S}$$

non possono essere quelle di un lavoro, ma di un lavoro diviso una carica. Introduciamo allora il concetto di ***lavoro unitario***:

$$L_u=\frac{L}{q}=\frac{\vec{F}*\vec{S}}{q}=\frac{\vec{F}}{q}*\vec{S}=\vec{E}*\vec{S}$$

Prendiamo il campo elettrico generato da una carica q positiva generica:



Se adesso vado da A a B, il campo elettrico farà un lavoro unitario dato da:

$$L_u=\vec{E}*\vec{S}$$

Come nel conto qui a lato, il campo eletrreico varia da punto a punto della mia traiettoria e lo spostamento cambia continuamente direzione e verso.

Allora prendo uno spostamento infinitesimo $\vec{dl}$ lo scompongo in uno spostamento infinitesimo perpendicolare al raggio e uno spostamento infinitesimo lungo il raggio ecc. e ecc.

Consentitemi di riportare solo i passaggi senza spiegazione. La spiegazione è nelal colonna a lato, al posto di $\vec{F}_{12}$ adesso dovete sostituire $\vec{E}$ e l'espressione del suo modulo quando sarà il momento, ma i conti sono esattamente gli stessi:

$$dL=\vec{E}*\vec{dl}$$

$$dL=\vec{E}*\vec{dl}=\vec{E}*(\vec{d}\,l_{parallelo}+\vec{d}\,l_{perpendicolare})$$

$$dL=\vec{E}*\vec{d}\,l_{parallelo}+\vec{E}*\vec{d}\,l_{perpendicolare}$$

$$\vec{E}*\vec{d}\,l_{perpendicolare}=0$$

$$\vec{E}*\vec{d}\,l_{parallelo}=E\,dl_{parallelo}=E\,dr$$

Ho preso simbolicamente l e non S per evitare confusioni con la superficie del teorema di gauss.
Allora per spostare la carica q_2 di un spostamento infinitesimo $\vec{dl}$ compio un lavoro infinitesimo dato da:

$$dL=\vec{F}_{12}*\vec{dl}$$

Lo spostamento infinitesimo $\vec{dl}$ è un vettore e lo posso scomporre lungo due direzioni assegnate, una perpendicolare al raggio congiungente le due cariche e l'altra parallela al raggio e quindi posso scrivere:

$$dL=\vec{F}_{12}*\vec{dl}=\vec{F}_{12}*(\vec{d}\,l_{parallelo}+\vec{d}\,l_{perpendicolare})$$

Sfruttando la proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma vettoriale:

$$dL=\vec{F}_{12}*\vec{d}\,l_{parallelo}+\vec{F}_{12}*\vec{d}\,l_{perpendicolare}$$

Ma $\vec{F}_{12}$ è diretta lungo il raggio quindi:

$$\vec{F}_{12}*\vec{d}\,l_{perpendicolare}=0$$

mentre:

$$\vec{F}_{12}*\vec{d}\,l_{parallelo}=F\,dl_{parallelo}=F\,dr$$

Abbaimo sostitutito nella formula l con r visto che si tratta di una variazione infinitesima del raggio.
Poiché lo spostamento infinitesimo parallelo e la forza F_{12} hanno lo stesso verso oltre che la stessa direzione, il lavoro infinitesimo è positivo.
Cosa vuol dire fisicamente? Vuol dire che il lavoro che sta facendo la carica q_2 è positivo ovvero che sto acquisendo energia io a spese del campo, ovvero che la carica q_2 sta passando da una regione ad alta energia potenziale a una zona a bassa energia potenziale (mi sta cedendo energia).
Per sapere il lavoro totale fatto dalla carica q_2 per andare dal punto A al punto B debbo sommare tutti gli infiniti infinitesimi di lavoro così ottenuto:

$$L=\int_a^b \frac{kq_1 q_2}{r^2}\,dr$$

dove al posto del modulo della forza ho messo la sua espressione in base alla legge di Coulomb.
Adesso K è costante e q_1 e q_2 sono costanti nel problema, sono date, allora posso portare le costanti fuori dall'integrale e ottengo:

$$L=kq_1 q_2\int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr$$

A questo punto avviene l'atto di fede (c'è sempre un momento della propria vita in cui ...). Lo vedrete nel secondo quadrimestre quando farete gli integrali. Bisogna trovare la "*primitiva*" di $\frac{1}{r^2}$ che è $\frac{-1}{r^2}$, e poi si calcola l'integrale "*definito*" calcolando la primitiva in r_b e sottraendo la primitiva calcolata in r_a.
Il risultato sarà il seguente:

$$L=kq_1 q_2\left[-\left\{\frac{1}{r}\right\}\right]_{r_a}^{r_b}=-kq_1 q_2\frac{1}{r_b}+kq_1 q_2\frac{1}{r_a}$$

$$L=\frac{kq_1 q_2}{r_a}-\frac{kq_1 q_2}{r_b}$$

Considerazioni importanti. Il lavoro fatto dalla carica per andare da A a B **NON** dipende dalla traiettoria eseguita.

$$L_u=\int_a^b \frac{kq}{r^2}\,dr$$

$$L_u=kq\int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$L_u=kq\left[-\left\{\frac{1}{r}\right\}\right]_{r_a}^{r_b}=\frac{-kq}{r_b}+\frac{kq}{r_a}$$

$$L_u=\frac{kq}{r_a}-\frac{kq}{r_b}$$

Arrivati a questo punto, poiché il lavoro unitario dipende solo dalla posizione che considero nello spazio posso definire una funzione potenziale elettrica data da:

$$V(r)=\frac{kq}{r}$$

E il lavoro unitario per andare da A a B è dato semplicemente da:

$$L_u=V(r_a)-V(r_b)$$

Ovviamente c'è la possibilità di passare dalla funzione potenziale alla energia potenziale e viceversa: se io metto una carica q_2 nel campo generato dalla carica q avrò:

$$E_p=q_2 V(r)$$

oppure:

$$V(r)=\frac{E_p}{q_2}$$

Ma il vantaggio della funzione potenziale è che data la carica che genera il campo elettrico viene generata anche una funzione potenziale che viaggia nello spazio con la velocità c della luce.
Notate che il campo elettrico (data la carica che lo genera) dipende solo dalla posizione ma è un vettore. Mentre la funzione potenziale dipende anch'essa (data la carica che la genera) solo dalla posizione ma è uno scalare.
Useremo il campo elettrico nel caso di forze e campi elettrici, useremo la funzione potenziale quando preferiremo descrivere ciò che osserviamo in termini di energie e trasformazioni di energia.

Dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale. Questo perché il campo era radiale e potevo fare quella semplificazione che diceva che il prodotto della forza per lo spostamento perpendicolare al raggio era zero. Se il campo non era radiale non potevo fare questa semplificazione. Poiché il lavoro fatto lungo una traiettoria qualunque è indipendente dalla traiettoria e dipende solo dalla posizione iniziale e dalla posizione finale posso definire una energia potenziale (univoca) che sarà: $E_p = \frac{kq_1 q_2}{r}$ E la formula precedente diventa: $L = E_p(r_a) - E_p(r_b)$ Il lavoro fatto dalla carica positiva q_2 per andare dalla posizione A alla posizione B è dato dalla energia potenziale calcolata in A meno l'energia potenziale calcolata in B. E poiché r_b è più grande di r_a allora $E_p(r_a) > E_p(r_b)$ Infatti se lasciata libera di muoversi la carica positiva q_2 si allontana dalla carica positiva q_1, passa da una energia potenziale maggiore a una energia potenziale minore. E il mondo è salvo. Divertitevi a vedere cosa succede quando le cariche sono entrrambe negative o hanno segno diverso. Non dovete rifare i conti (!), dovete semplicemente mettere nelle formule finali il segno corrispondente alla carica e vedere se è vero che le cariche si spostano da energia potenziale maggiore a energia potenziale minore. Ultima cosa: evidentemente l'energia potenziale non dipende solo dalla distanza ma anche dal valore della carica che metto nel campo generato dalla prima. Questo dal punto di vista dei conti è un po' scomodo. Sarebbe meglio definire una funzione indipendente dalla carica che metto nel campo generato dalla carica uno. Vedere il conto di lato, nella seconda colonna...	

Rimane una sola cosa da puntualizzare. Poiché l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva (quello che si osserva nella sperimentazione è solo una differenza di energia potenziale), posso fissare un punto comodo e dire che l'energia potenziale in quel punto vale tot, significa semplicemente spostare la scala di riferimento.

In genere si assume che l'energia potenziale all'infinito sia zero, ovvero che la funzione potenziale all'infinito sia zero

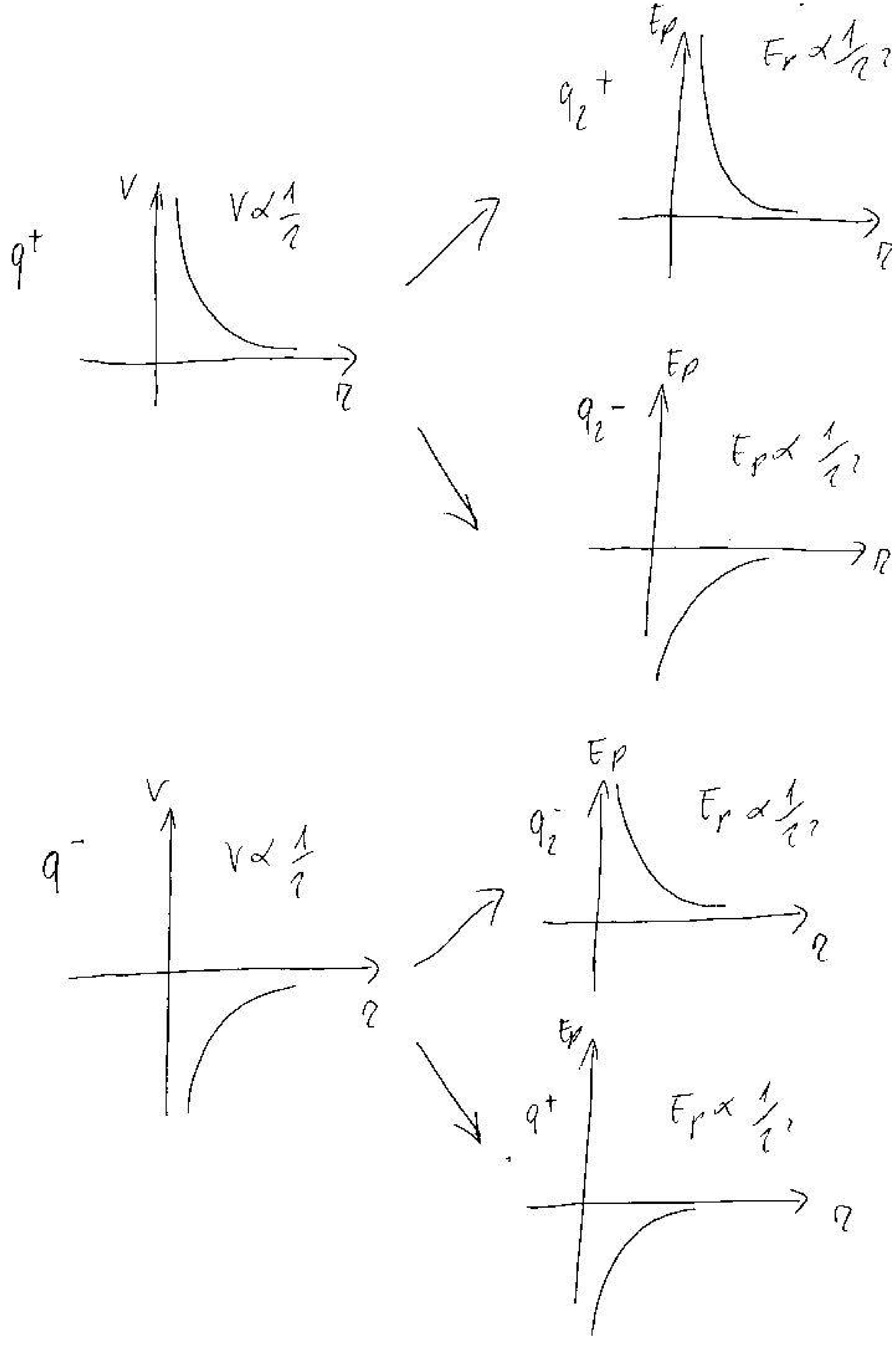
Osservate voi che succede alle formule fatte sopra.

In ogni caso ricordarsi sempre che i corpi e le cariche si spostano sempre dall'energia potenziale maggiore all'energia potenziale minore.

Per concludere riporta alcuni grafici. In quello a sinistra è riportato il grafico della funzione potenziale generata una volta dalla carica positiva e una volta dalla carica negativa. Entrambi i grafici si biforcano in due grafici dell'energia potenziale a seconda del fatto che la carica che metto nel potenziale sia positiva o negativa.

Controllate i segni e se la legge di natura spostamento verso energia potenziale minore è rispettata.

Vi faccio osservare che il grafico della funzione potenziale è un ramo di iperbole equilatera ma il grafico della energia potenziale NON è una iperbole equilatera, va come 1 su r^2...



q^+
V
$V \propto \frac{1}{r}$
r
E_p
q_2^+
$E_p \propto \frac{1}{r^2}$
r
E_p
q_2^-
$E_p \propto \frac{1}{r^2}$
r
q^-
V
$V \propto \frac{1}{r}$
r
E_p
q_2^-
$E_p \propto \frac{1}{r^2}$
r
E_p
q^+
$E_p \propto \frac{1}{r^2}$
r