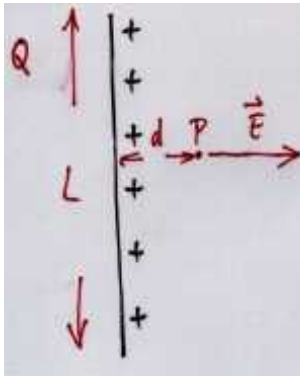


applicazioni teorema di gauss

Vediamo alcune applicazioni del teorema di Gauss.

filo indefinito carico omogeneamente

Prendiamo un filo indefinito caricato positivamente con distribuzione di carica omogenea:

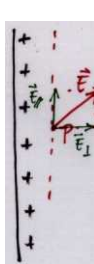


Vogliamo calcolare il campo elettrico prodotto da questa distribuzione di cariche nel punto P della figura a lato. Il punto P è alla distanza d dal filo. Il filo può essere considerato indefinito solo se $d \ll L$, ovvero se il filo è molto più lungo della distanza d del punto P dal filo. Se la carica totale Q è distribuita omogeneamente (basta aspettare un po' di tempo perché sia così) e se la lunghezza totale del filo è L , posso definire una densità lineare

$$\rho = \frac{Q}{L}$$

A che serve la densità lineare ρ ? Se io prendo una porzione del filo, diciamo l , la quantità di carica contenuta nella porzione di filo è semplicemente $q = \rho l$.

Innanzitutto vediamo di fare delle considerazioni sulla simmetria del campo elettrico. Se non faccio considerazioni di simmetria, se il campo elettrico non ha particolari simmetrie non riesco ad applicare efficientemente e in maniera semplice il teorema di Gauss.



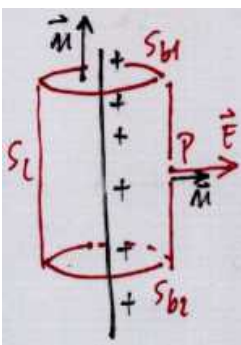
Il campo elettrico \vec{E} innanzitutto deve essere perpendicolare al filo. Se non fosse perpendicolare al filo, come nella figura a lato, allora avrebbe una componente parallela $E_{\text{parallelo}}$ e questa componente parallela metterebbe in moto le cariche e altererebbe la loro omogeneità. Questo contrariamente all'ipotesi fatta che le cariche siano ferme e omogeneamente distribuite. Quindi il campo elettrico non può che essere perpendicolare.

Poi per questioni di simmetria \vec{E} deve avere il modulo uguale in tutti i punti su una circonferenza di raggio d che abbia il centro sul filo e che sia giacente su un piano perpendicolare al filo.

Avendo fatto queste considerazioni di simmetria passiamo alla applicazione del teorema di Gauss e scriviamo :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Si tratta ora di prendere una superficie conveniente, arbitraria. Se si tratta di un filo e se la simmetria del campo elettrico è cilindrica, forse conviene prendere un cilindro che abbia il punto P sulla sua superficie laterale e che abbia come asse di simmetria il filo stesso, come in figura:



Il raggio del cilindro è d , la distanza del punto P dal filo, e la sua altezza, arbitraria, sia h .

Adesso sviluppiamo i due membri della equazione del teorema di Gauss. Vediamo prima il secondo membro. Se l'altezza del cilindro è h , la lunghezza del filo contenuto nel cilindro è giustappunto h . Quindi il secondo membro diventa:

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{(\rho h)}{\epsilon_0}$$

Vediamo adesso il secondo membro. Il flusso totale attraverso la superficie chiusa cilindrica è dato dalla somma del flusso attraverso la superficie laterale più il flusso attraverso la base S_{b1} più il flusso attraverso la superficie di base S_{b2} . In formule:

$$\Phi_{ST} = \Phi_{SL} + \Phi_{SB1} + \Phi_{SB2}$$

Ma il vettore \vec{E} ha direzione perpendicolare al versore \vec{n} della superficie di base, sia la 1 che la 2, allora $\alpha = 90^\circ$ e quindi il prodotto scalare $\vec{E} \times \vec{n} = 0$ e allora:

$$\Phi_{SB1} = \Phi_{SB2} = \int_{SB1} \vec{E} \times \vec{n} dS = \int_{SB2} \vec{E} \times \vec{n} dS = 0$$

Rimane solo il flusso attraverso la superficie laterale. Ma sulla superficie laterale il vettore \vec{E} ha la stessa direzione e lo stesso verso di \vec{n} e inoltre il suo modulo è costante su tutta la superficie laterale per ragioni di simmetria, quindi $\vec{E} \times \vec{n} = E$ e quindi:

$$\Phi_{SL} = \int_{SL} \vec{E} \times \vec{n} dS = \int_{SL} E dS = E \int_{SL} dS = E 2\pi d h \quad (\text{vi ricordo che la superficie laterale di un cilindro retto è la lunghezza della circonferenza di base per l'altezza...})$$

Adesso mettiamo insieme il membro di sinistra con il membro di destra:

$$E 2\pi d h = \frac{(\rho h)}{\epsilon_0}$$

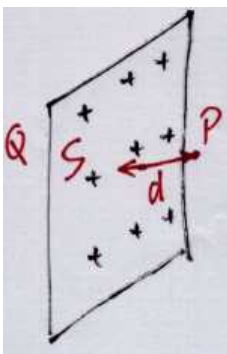
Da cui ricaviamo:

$$E = \frac{\rho}{(2\pi d \epsilon_0)}$$

Cioè il modulo del campo elettrico è inversamente proporzionale alla distanza (e non alla distanza al quadrato come nel caso di un campo elettrico generato da una carica puntiforme)

Lamina indefinita carica omogeneamente

Prendiamo ora il caso di una lamina carica omogeneamente, ad es. di carica positiva. Come in figura qua a lato.



Questa volta possiamo definire una densità superficiale di carica σ :

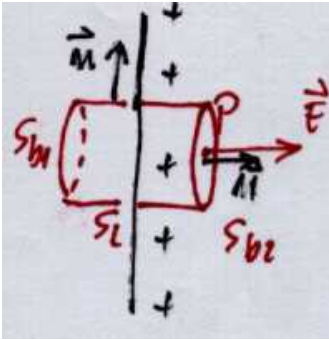
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

dove Q è la quantità di carica totale sulla lamina e S è la superficie totale della lamina.

Prendiamo un Punto P alla distanza d dalla lamina. E ci chiediamo quanto vale \vec{E} e come è diretto. Solite considerazioni sulla simmetria.

1. innanzitutto la lamina può essere considerata indefinita se la distanza $d \ll L$ e $d \ll l$ dove L e l sono le dimensioni della lamina. Il fatto di considerare la lamina indefinita ci permette di trascurare "gli effetti di bordo" cioè quello che fa il campo elettrico vicino ai bordi della lamina.
2. \vec{E} deve essere diretto perpendicolarmente alla lamina, come nel caso precedente. Se fosse diretto obliquamente alla lamina ci sarebbe una componente parallela alla lamina e questa componente metterebbe in moto le cariche, contrariamente all'ipotesi che le cariche siano distribuite omogeneamente sulla lamina e siano ferme (abbiamo aspettato abbastanza tempo perché si fermassero).

3. Il modulo di \vec{E} deve essere costante su un piano parallelo alla lamina e distante d.



Prendiamo adesso la lamina vista di taglio come in figura qui a lato. Per applicare il teorema di Gauss (sempre dopo le nostre considerazioni sulla simmetria) dobbiamo prendere una superficie di Gauss chiusa *furba*, cioè corrispondente alle nostre considerazioni di simmetria. Una superficie possibile è quella suggerita a lezione da un odi voi, ovvero un cubo con il punto P su una delle facce. Lasciamo alla persona in questione l'utile esercizio di calcolare il teorema di Gauss in questo caso. Noi prenderemo un cilindro retto con la superficie laterale perpendicolare alla lamina. Facciamo le solite considerazioni su \vec{E} e sul versore \vec{n} :

- sulle due superfici di base S_{b1} e S_{b2} il vettore \vec{E} e il versore \vec{n} hanno la stessa direzione e verso. Quindi l'angolo α formato dai due vettori è zero e quindi il prodotto scalare $\vec{E} \times \vec{n} = E$ dove E è il modulo di \vec{E}
- sulla superficie laterale S_L \vec{E} e \vec{n} sono perpendicolari fra di loro, quindi l'angolo α è retto e il prodotto scalare $\vec{E} \times \vec{n} = 0$

Ora scriviamo come prima il teorema di Gauss:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

E, come prima, sviluppiamo indipendentemente i due membri dell'equazione e poi li mettiamo uguali fra di loro. La quantità di carica contenuta nella superficie di Gauss chiusa è quella contenuta nella superficie della circonferenza ritagliata dalla superficie sulla lamina. Quindi

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma \pi r^2)}{\epsilon_0}$$

Adesso lavoriamo sul primo membro. Il flusso totale è dato da:

$$\Phi_{ST} = \Phi_{SL} + \Phi_{SB1} + \Phi_{SB2}$$

Ma questa volta su tutta la superficie laterale il campo elettrico è perpendicolare al versore e il contributo del flusso laterale è zero. I due contributi delle due superfici di base devono essere eguali fra loro per ragioni di simmetria, il prodotto scalare diventa $\vec{E} \times \vec{n} = E$ con E costante su tutta la superficie di base e quindi:

$$\Phi_{SB1} = \Phi_{SB2} = \int_{SB1} \vec{E} \times \vec{n} dS = \int_{SB2} \vec{E} \times \vec{n} dS = \int E dS = E \int dS = E \pi r^2$$

e quindi

$$\Phi_{SB1} + \Phi_{SB2} = 2 E \pi r^2$$

Poniamo adesso uguali i due membri:

$$2 E \pi r^2 = \frac{(\sigma \pi r^2)}{\epsilon_0}$$

che con le opportune semplificazioni del caso suggeriteci dal nostro cuore di algebrista nato:

$$E = \frac{\sigma}{(2\epsilon_0)}$$

Osservate bene: il modulo del campo elettrico non dipende più dalla distanza alla quale considero il

punto P. Certo è che se mi allontanano molto l'approssimazione che d sia piccolo rispetto a L e a l non vale più e il mio conto non vale. Ma a distanze piccole rispetto alla lamina il modulo risulta essere costante in tutti i punti dello spazio, è un campo uniforme.

Osservate ancora:

- se il campo elettrico era generato da una carica puntiforme era inversamente proporzionale al quadrato della distanza
- se il campo elettrico era generato da un filo indefinito era inversamente proporzionale alla distanza
- se il campo elettrico è generato da una lamina indefinita risulta essere indipendente dalla distanza

NB

Le figure in questa dispensa vi possono apparire non tanto buone, ma pensate che sono state compresse e semplificate per ridurre al minimo il peso in Kb del documento. Accontentatevi...