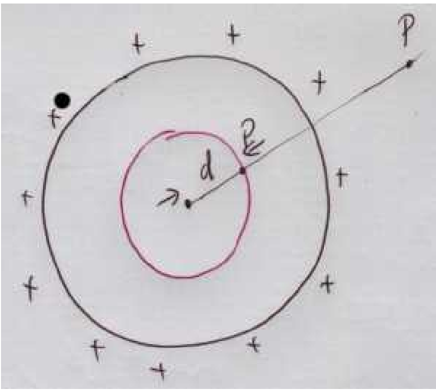
ancora un po' di applicazioni del teorema di Gauss

Sfera cava



In nero è disegnata una sfera cava carica positivamente omogeneamente con densità di carica σ , la quantità totale di carica della asfera cava è Q.

Mi chiedo quanto sia il campo elettrico in un punto qualunque all'interno della sfera cava e in un punto all'esterno della sfera cava.

Innanzitutto al centro della sfera cava il campo elettrico è nullo per ragioni di simmetria. Prendiamo allora un punto P qualunque all'interno della sfera cava. Poiché siamo in presenza di una sfera carica omogeneamente la simmetria del problema sarà sferica. Allora prendo una superficie di Gauss chiusa sferica concentrica alla sfera cava, che abbia sulla sua superficie il punto P. Il raggio di questa sfera ideale sia d, ovvero la distanza del punto P dal centro della sfera cava.

Il teroema di Gauss mi dice che:

$$\Phi_S(\vec{E})=\frac{q}{\epsilon_0}$$

Sviluppiamo come al solito i due mebri indipendentemente. La carica q contenuta nella sfera di gauss è zero: non ci sono cariche all'interno della sfera cava. Allora il flusso è zero.

Prendiamo in esame il primo membro: come è diretto il campo elettrico $\vec{E}$? O in fuori o in dentro la superficie di Gauss. Inoltre il suo modulo deve essere costante su tutta la suoperficie di gauss per ragioni di simmetria sferica. Allora la sua direzione è la stessa del versore $\vec{n}$ della superficie sferica di gauss e il coseno uno (oppure -1). Il prodotto scalare trra i due vettori si scioglie e abbiamo:

$$\Phi_S(\vec{E})=\int_s \vec{E}\times\vec{n}\,dS=\int_s E\,dS=E\int dS=ES$$

allora uguagliando i due membri sviluppati indipendentemente uno dall'altro:

ES =0

Ma S non può essere nulla: è la mia superficie di gauss sferica, allora perché il prodotto sia nullo è necessario che E sia zero.

Il campo elettrico E è zero in tutti i punti interni alla sfera cava.

E per un punto esterno?

Se prendiamo una sfera di gauss concentrica alla sfera cava che passa per un punto P esterno alla sfera cava abbiamo che q=Q, cioè la carica contenuta nella sfera di gauss è tutta la carica della sfera cava. Ripeto per il primo mebro i ragionamenti sulal simmetria sferica e ottengo:

$$E\,S=\frac{Q}{\epsilon_0}$$

ma $S=4\pi d^2$ e quindi:

$$E=\frac{Q}{(S\epsilon_0)}=\frac{Q}{(4\pi\epsilon_0 d^2)}$$

che è la buona vecchia e cara legge di Coulomb. Vista dall'esterno la sfera cava si comporta come se tutta la sua carica fosse concentrata nel suo centro.

A suivre...