Una questione di simmetria

Nino Martino

sabato 9 dicembre 2006

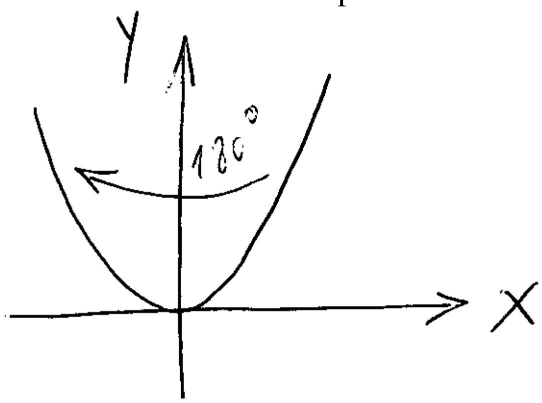
Sommario

In natura esistono simmetrie. Ogni volta che siamo in presenza di simmetrie risulta semplice la descrizione in termini matematici. Il teorema di Gauss per il campo gravitazionale è sempre valido e sempre applicabile ma fornisce risultati utili e semplici solo se siamo in presenza di distribuzioni di masse simmetriche.

In questa dispensa vengono anche esaminate alcune situazioni particolarmente semplici di distribuzioni di massa. Il teorema di Gauss è particolarmente potente quando siamo in presenza di distribuzioni continue di massa con simmetrie.[1]

1 definizione di simmetria

Siamo abituati fin dalla matematica a ragionare in termini di simmetria ma attribuiamo in genere un carattere restrittivo al concetto di simmetria. Una parabola della forma $y = ax^2$è simmetrica, certo, ma in realtà è simmetrica rispetto a una rotazione di 180^0rispetto all'asse Y.



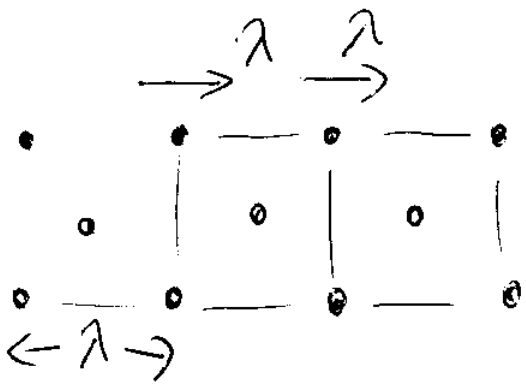
La simmetria è definita sempre rispetto a una certa operazione. Vi sono simmetrie per rotazione di un certo angolo rispetto a una certa retta, vi sono simmetrie per traslazione ecc. ecc. Bisognerebbe sempre definire l'operazione attraverso la quale ottengo una simmetria.

Anche se non avete mai considerato la cosa sotto questo aspetto il principio di conservazione dell'energia afferma che la energia totale di un sistema isolato calcolata in un certo istante di tempo è uguale alla energia totale calcolata in un istante di tempo successivo. Ma cosa vuol

[1]Questa dispensa è stata scritta in LyX, che è un potente editore che utilizza TeX. TeX è usato nella comunità scientifica per scrivere documenti che contengono formule o altro. Ne risultano file estremamente leggeri dal punto di vista dei Kb ma che hanno una insuperabile eleganza e rifinitura. Per problemi connessi alla lettura dei files, questa dispensa viene salvata in formato .pdf che fa perdere in parte il vantaggio delle dimensioni. Stiamo cercando di risolvere il problema dell'installazione per Win.

dire questo? Vuol dire che l'enrgia rimane costante se io effettuo una traslazione temporale. L'energia è simmetrica rispetto a una traslazione temporale.

Esistono anche le simmetrie rispetto a traslazioni spaziali: se io prendo un reticolo atomico di un cristallo e effettuo una traslazione spaziale di una distanza atomica riottengo la stessa configurazione spaziale del reticolo atomico.



Conclusione: è necessario sempre definire il tipo di simmetria che abbiamo di fronte, ovvero definire l'invarianza dell'oggetto rispetto a una certa operazione (da definire, appunto...)

2 La descrizione matematica della natura è semplice se vi sono delle simmetrie

Normalmente la natura presenta delle situazioni molto complicate. Pensate ad esempio alla fiamma del camino. Vi sono vortici che cambiano continuamente la forma e il colore della fiamma. La descrizione matematica di questa fiamma è possibile sicuramente (tutto può essere descritto in termini matematici se è necessario...) ma è estremamente complicata, tanto complicata e complessa da risultare impraticabile. Pensate anche all'attrito incontrato nell'aria da una automobile. Cotruiscono delle camere del vento, dove viene simulata la velocità della macchina nell'aria facendo muovere la massa d'aria, perché la descrizione matematica è troppo complicata e quindi si fa una simulazione di comportamento per studiare il coefficiente di attrito.

Siamo in grado di fare dei conti relativamente semplici invece se siamo in presenza di qualche forma di simmetria. Pensate alla conservazione dell'energia. Prendiamo un carrello all'inizio di uno scivolo e lasciamolo andare, alla fine dello scivolo avrà una certa velocità. La simmetria rispetto alla traslazione temporale mi permette di calcolare con facilità la velocità finale del mio oggetto.

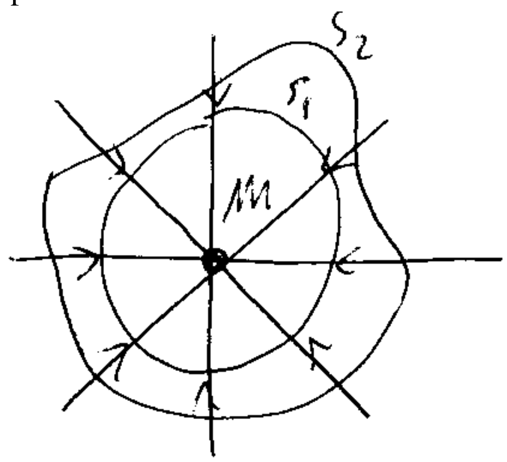
Ogni volta che in natura posso prendere una qualche configurazione simmetrica degli oggetti posso farne una descrizione semplice in termini matematici.

Per nostra fortuna vi sono molte configurazioni simmetriche n natura, oppure possiamo approssimare con buona approssimazione quella che è la realtà con dei modelli descrittivi che contengono simmetrie.

3 Il teorema di Gauss per il campo gravitazionale

Ci siamo ricavati il teorema di Gauss per il campo gravitazionale $\overrightarrow{g}$ in un caso particolarmente semplice e assurdamente simmetrico. Abbiamo preso una massa puntiforme che generava il campo gravitazionale. Abbiamo fatto quindi una prima approssimazione: non esistono nella realtà masse puntiformi, ma in certe scale le masse diventano puntiformi, la massa del mio computer diventa puntiforme se io scelgo una scala cittadina. La massa della terra è sicuramente non puntiforme se considero la scala di questa stanza, ma diventa puntiforme se io prendo una scala tipo sistema solare, ecc. ecc.

Il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme m è simmetrico: ha una simmetria sferica intorno al punto che genera il campo. Il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme è in effetti radiale, è diretto lungo il raggio congiungente il punto considerato con la massa puntiforme.



Il teorema di Gauss mi diceva che se io prendo una superficie S chiusa sferica centrata sulla massa ho che:

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = 4\pi G m$

Al di là del fatto che magari sono incomprensibili i simboli (!), la formula matematica sembra abbastanza semplice.

Poi abbiamo fatto n ulteriore passo: se io prendevo una superficie chiusa qualunque che conteneva la superficie sferica chiusa centrata sulla massa avevo ancora che attraverso questa superficie chiusa qualunque:

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = 4\pi G m$

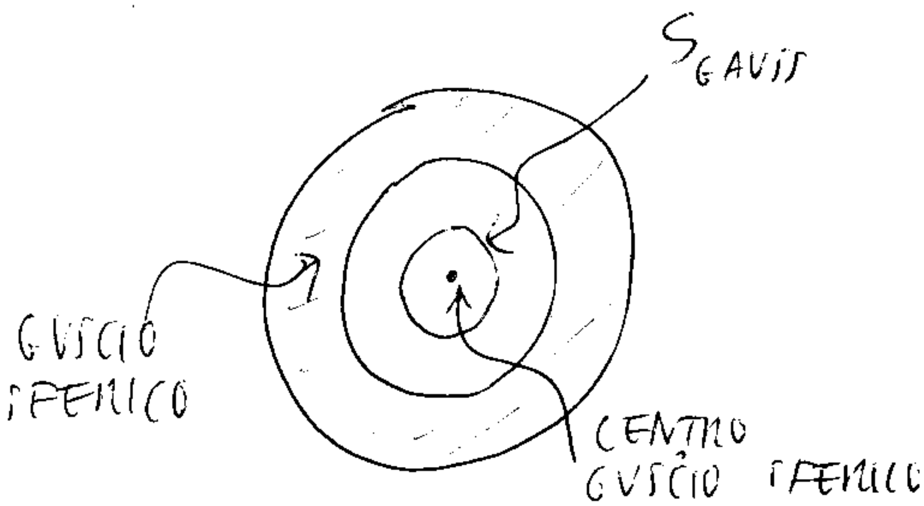
Guardate la figura. Se il flusso è dato dal numero di linee di campo che attraversano la superficie tante sono le linee che passano attraverso la sfera tante sono le linee che passano attraverso la superficie qualunque chiusa. O se preferite possiamo ragionare in altri termini: consideriamo la superficie chiusa che è quella che una faccia rivolta all'esterno (la superficie qualunque) e una faccia rivolta all'interno, la superficie sferica. Questa superficie chiusa non contiene masse, quindi il flusso attrraverso questa superficie è zero. Allora il flusso che entra nella faccia esterna è uguale al flusso che esce dalla faccia interna. Quindi anche il flusso attraverso la superficie qualunque, non centrata sulla massa è dato dalla:

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = 4\pi G m$

Osservate che la secondo membro figura la massa m che è tutta la massa contenuta. La massa contenuta può essere una distribuzione discreta (un certo numero di masse puntiformi) o una distribuzione continua, come il guscio di una navicella spaziale. Dal punto di vista del teorema di Gauss poco importa. La massa m è quella contenuta nella superficie chiusa che ho preso in considerazione. Punto.

4 Applicazione del teorema di Gauss a un guscio sferico di massa cavo

Prendiamo un guscio sferico cavo di massa, come in figura.



Prendiamo una superficie sferica chiusa di Gauss centrata nel centro della sfera cava, tutta interna al guscio. Possiamo ragionare in questo modo. Per il teorema di Gauss deve essere

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = 4\pi Gm$

ma la massa interna alla superficie di Gauss è zero. quindi

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = 0$

Ma a che cosa è uguale $\Phi_S(\overrightarrow{g})$? Il campo $\overrightarrow{g}$, se c'è, deve essere simmetrico perché la distribuzione di massa, continua, è simmetrica (il guscio è supposto avere una densità uniforme...). Allora su tutti i punti della sfera chiusa di Gauss deve essere uguale in modulo e con il verso o in fuori o in dentro. Allora deve essere:

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = E \cdot S$

e quindi deve essere

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = E \cdot S = 0$

Ma perché un prodotto sia zero deve essere zero o uno o l'altro dei due fattori. Ma S non è zero. Allora se il prodotto deve essere zero deve essere zero g. Quindi il campo gravitazionale all'interno di un guscio sferico di massa è rigorosamente zero.

E se il guscio non è sferico? E se la sua densità non è costante? Quello che abbiamo ricavato nel caso a simmetria sferica è comunque valido, con qualche piccola complicazione in più. Applicazione pratica: dentro ad una astronave in orbita non sono attirato dalle pareti...

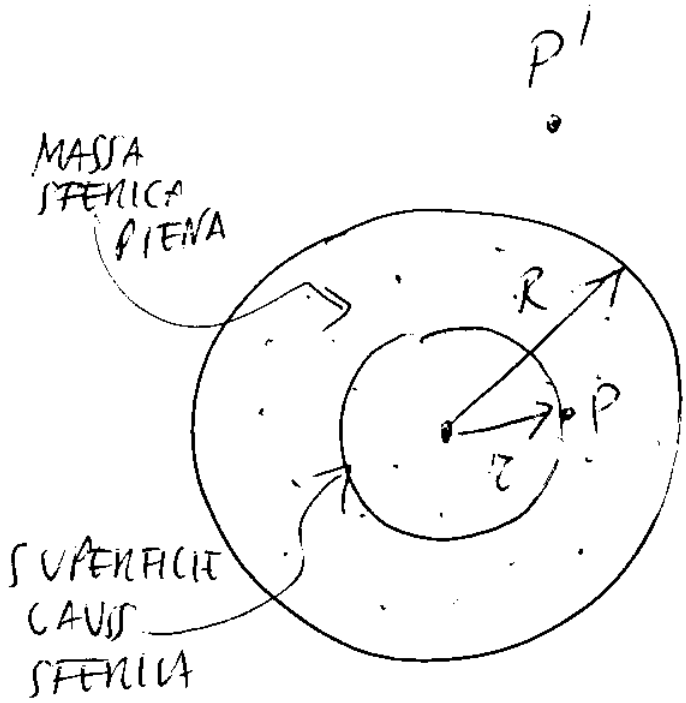
5 Applicazione del teorema di Gauss a una sfera piena di densità δ costante

Prendiamo adesso una sfera piena con densità δuniforme in tutti i punti. Ricordiamo qui che:

$\delta = \frac{m}{V}$

e che quindi

$m = \delta V$



Sia la sfera piena di raggio R. Prendiamo adesso una superficie di Gauss sferica centrata nel centro della massa di raggio$r$. Il teorema di Gauss dice che:

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = 4\pi Gm$

dove m è tutta la massa contenuta nella sfera di Gauss di raggio r.

Sviluppiamo i due membri indipendentemente e poi li poniamo uguali. Verrà fuori una equazione nella incognita $g$che risolvo poi rispetto a g.

Il secondo membro è:

$4\pi Gm = 4\pi G\delta V = 4\pi G\delta\frac{4}{3}\pi r^3$

Il primo membro è invece:

$\Phi_S(\overrightarrow{g}) = gS = g4\pi r^2$ (ho presupposto che gè uniforme su tutti i punti della sfera di Gauss e che abbia direzione e verso uguali al versore della superficie di Gauss, allora il coseno diventa 1 e il prodotto scalare si scioglie nel semplice prodotto dei due moduli...)

Adesso pongo uguali due membri:

$g4\pi r^2 = 4\pi G\delta\frac{4}{3}\pi r^3$

facendo le opportune semplificazioni algebriche ottengo:

$g = G\delta\frac{4}{3}\pi r$

Questo vale finché $r \leq R$ Quando r è maggiore di R, il raggio della sfera piena data, allora la relazione precedente diventa:

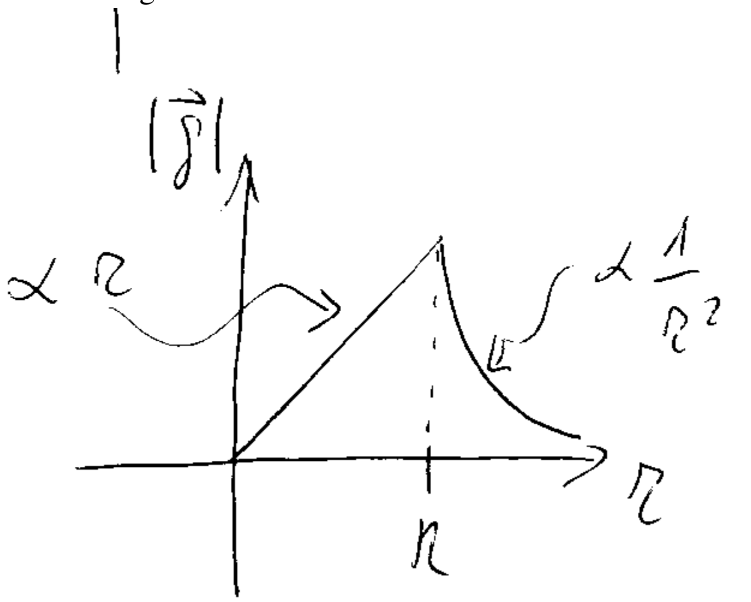
$g4\pi r^2 = 4\pi G\delta\frac{4}{3}\pi R^3$

non posso fare le semplificazioni di prima (r e R sono diversi, sono due cose diverse...) e quindi mi ricavo

$g = G\delta\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{r^2}$

Risultato: fino a che sono dentro la sfera piena il campo gravitazionale aumenta linearmente con la distanza, quando sono all'esterno della sfera il campo gravitazionale è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza.

Facendo un grafico:



Osservate che in questo caso come nel precedente abbiamo applicato il teorema di Gauss ma abbiamo fatto considerazioni sulla simmetria. Senza le considerazioni sulle simmetria delle distribuzioni continue di massa avremmo potuto applicare lo stesso il teorema di Gauss ma il calcolo sarebbe stato molto complicato, non saremmo stati in grado di svolgere i conti, almeno a questo livello, e non saremmo arrivati ad alcun risultato.

L'applicazione del teorema di Gauss più le considerazioni sulla simmetria mi consentono di ottenere risultati anche sorprendenti.

Questi risultati dipendono dalle propietà del campo vettoriale, e una volta che costruiamo una matematica coerente dobbiamo credere ai risultati, la matematica rende il ragionamento coerente e relativamente semplice, una volta che ne sono accettate le regole del gioco.

Pensate che una buona parte di voi aveva risposto inizialmente che il campo aumentasse mano a mano che mi avvicinavo al centro della massa. Queste persone non erano matematicamente coerenti ma si ricordavano una formula, quella che dice che il campo è proporzionale al quadrato della distanza dal centro, la applicavano con quello che loro supponevano coerenza. Ma avevano dimenticato che quella formula era ricavata solo nel caso di una massa puntiforme. Qui invece la massa non è puntiforme e quindi quella formula non è valida. Bisogna necessariamente applicare strumenti matematici più evoluti, ovvero il teorema di Gauss.

Poi, se volete, si possono fare altri ragionamenti intuitivi: se io sono in un punto interno alla sfera piena tutta la massa che mi sta sopra non mi influenza, mi influenza solo la massa che sta al di sotto ecc. ecc.