Teorema di Gauss per il campo gravitazionale $\vec{g}$

Dove vogliamo arrivare? Vogliamo arrivare al teorema di Gauss per il campo gravitazionale $\vec{E}$:

$$\Phi_S(\vec{g})=-4\pi G M$$

Che dice fondamentalmente questo: il flusso attraverso una superficie chiusa S che contiene una massa del campo gravitazionale $\vec{g}$ è pari alla massa contenuta per la costante di gravitazione universale G per 4 π

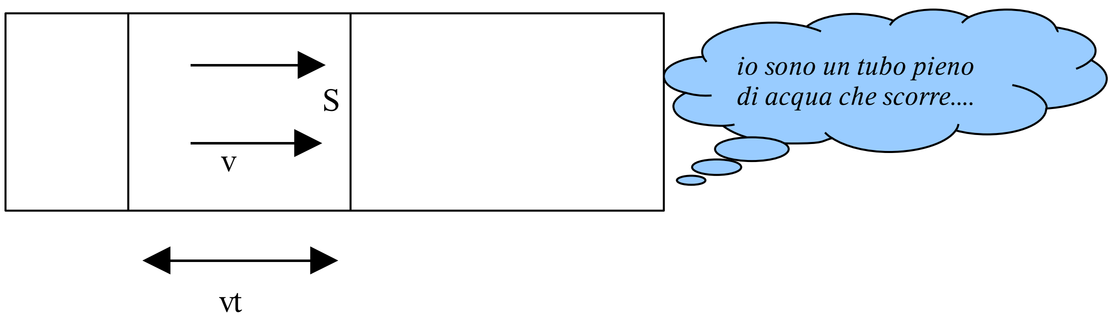
Evidentemente per poter comprendere cosa diavolo vuol dire dobbiamo prima introdurre il concetto di flusso di un vettore attraverso una superficie chiusa e darne una formulazione matematica. E poi dobbiamo vederne l'utilità. Studieremo alcune applicazioni che daranno risultati particolarmente semplici.

Arriviamo a definire il flusso attraverso una superficie chiusa di un vettore attraverso alcuni passi:

1. analogia idrodinamica e flusso dell'acqua in un tubo
2. definizione di flusso attraverso una superficie piana
3. definizione di flusso di un vettore attraverso una superficie qualunque
4. definizione di flusso attraverso una superficie qualunque chiusa
5. applicazione della definizione di flusso di $\vec{E}$ al caso di una carica puntiforme e con una superficie chiusa sferica centrata sulla carica: prima formulazione del teorema di gauss
6. generalizzazione: tale teorema vale per una superficie chiusa qualunque che contiene la carica: teorema di Gauss

analogia idrodinamica e flusso dell'acqua in un tubo

Prendiamo un tubo e dell'acqua che scorre omogeneamente dentro di esso. Supponiamo che il campo delle velocità $\vec{v}$ sia un campo uniforme, cioè che il vettore $\vec{v}$ sia costante in tutti i punti del liquido. Questo non è fisicamente vero: il vettore velocità sarà minore vicino alla parte del tubo per via dell'attrito con le pareti. Ma questa disomogeneità produce poi un moto vorticoso... lasciamo stare. Tanto ci interessa non una descrizione delle velocità all'interno del tubo ma semplicemente avere una analogia idrodinamica



La superficie S è perpendicolare al flusso dell'acqua, inizialmente. Se il modulo della velocità è v , nel termpo t transita attraverso la superficie S la quantità d'acqua contenuta nel cilindro che ha per base S e per altezza vt . Quindi il flusso attraverso la superficie S lo posso scrivere così:

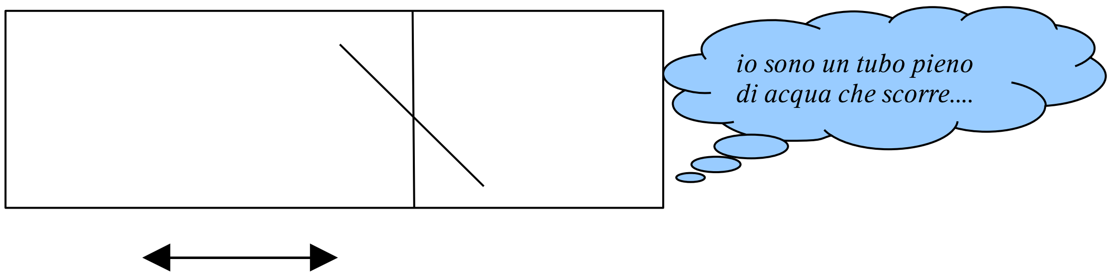
$\Phi_s(\vec{v})=Svt$

In realtà io sono interessato al flusso nell'unità di tempo. Allora dividendo per t il secondo membro ottengo:

$\Phi_s(\vec{v})=Sv$

Dove questa volta al simbolo $\Phi_s(\vec{v})$ corrisponde il flusso unitario (rispetto al tempo) del vettore $\vec{v}$.

Se adesso incliniamo di un angolo α la superficie piana S nel tubo come in figura, quanto sarà il flusso unitario?



La superficie utile (utile per il calcolo del passaggio di acqua) è diventata adesso $S\cos(\alpha)$ e quindi il flusso unitario (per unità di tempo) è diventato:

$\Phi_s(\vec{v})=Sv\cos\alpha$

Piccolo cambio di formulazione simbolica: ricordiamoci che il prodotto scalare fra due vettori è:

$\vec{A}\times\vec{B}=AB\cos\alpha$

Poiché ricorda maledettamente da vicino quanto abbia scritto a proposito del flusso, sarebbe carino poter esprimere il membro a destra come un prodotto scalare. Ora la velocità è un vettore ma la superficie non è un vettore, è uno scalare.

Pssiamo dare un carattere vettoriale alla superficie seguendo due strade:

- introdurre il versore $\vec{n}$: il versore $\vec{n}$ è caratterizzato dal fatto che $(\vec{n})=1$, che la sua direzione è quella perpendicolare alla superficie e il suo verso per il momento viene lasciato arbitrario, ma nel nostro caso viene scelto con lo stesso verso di $\vec{v}$
- Introdurre il carattere vettoriale nella superficie stessa, come d'altra parte usano alcuni testi. Allora $\vec{S}$ è un vettore tale che $(\vec{S})=S$, la direzione di $\vec{S}$ è perpendicolare alla superficie e, il suo verso è per il momento scelto arbitrariamente ma nel nostro caso è lo stesso di $\vec{v}$

Tutte e due le strade sono legittime, da un punto di vista formale. Allora la formula del flusso di $\vec{v}$ attraverso la superficie S inclinata di α gradi rispetto alla direzione di $\vec{v}$ diventa:

$\Phi_S(\vec{v})=\vec{v}\times\vec{S}$ oppure:

$\Phi_S(\vec{v})=\vec{v}\times\vec{n}S$

Il risultato dei due prodotti scalari è ovviamente lo stesso:

$\Phi_s(\vec{v})=Sv\cos\alpha$

definizione di flusso attraverso una superficie piana

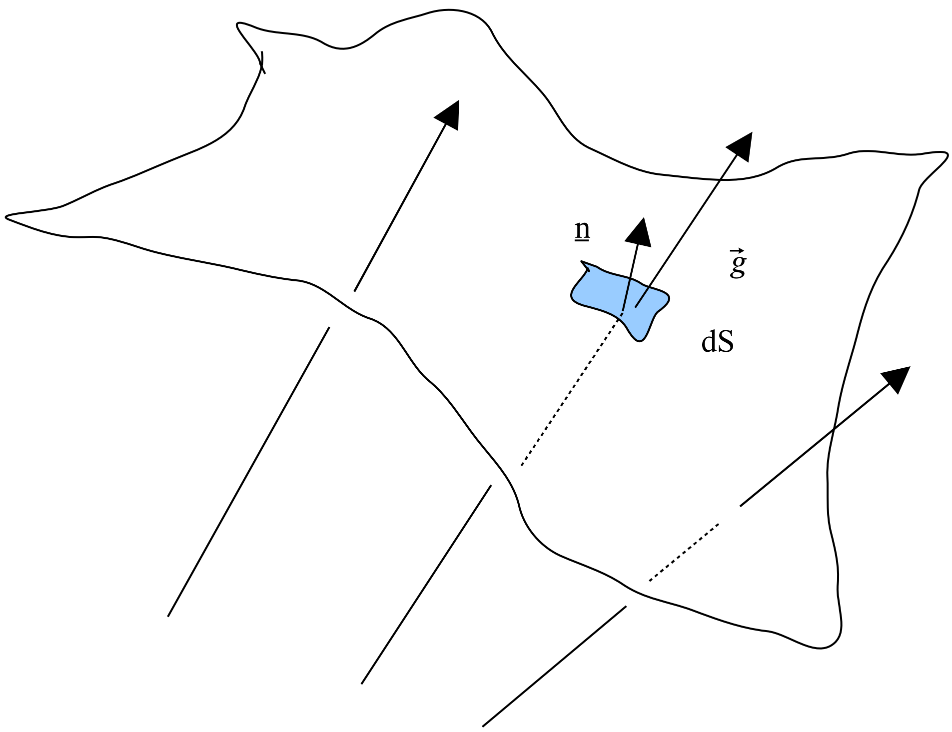
Possiamo generalizzare l'analogia idrodinamica ad un campo vettoriale qualunque. Sia $\vec{A}$ un campo vettoriale uniforme qualunque e sia S una superficie piana qualunque. Definiremo il flusso del vettore $\vec{A}$ attraverso la superficie piana S lo scalare dato dalla formula:

$$\Phi_S(\vec{A}) = \vec{A} \times \vec{n} S$$

da notare che in questo caso non c'è un passaggio reale di qualche cosa attraverso la superficie S, è semplicemente una definizione matematica, è l'introduzione di una terminologia simbolica che ci sarà utile in seguito.

definizione di flusso di un vettore attraverso una superficie qualunque

Ulteriore generalizzazione necessaria. Come ci comportiamo se il campo vettoriale cambia da punto a punto e la superficie in questione non è piana ma di forma variabile qualunque?



In figura i vettori sono sottolineati, per un problema di scrittura con il mio software. Prendiamo sulla superficie S un elementino infinitesimo dS di superficie. L'intera superficie S può essere pensata scomposta in infiniti infinitesimi dS. La somma infinita di tutti questi infinitesimi è ovviamente S. poiché dS è un infinitesimo lo posso pensare come superficie piana. L'intera superficie S è pensabile come la somma infinita di elementi infinitesimi di superficie piana.

Se adesso fisso l'attenzione sull'elemento infinitesimo dS posso definire il versore della sua normale, $\vec{n}$, e il vettore $\vec{g}$, in un elemento infinitesimo di area non cambia, lo posso considerare costante e uniforme su tutta la superficie.

Allora posso definire l'elemento infinitesimo di flusso attraverso l'area infinitesima:

$$d\Phi(\vec{g}) = \vec{g} \times \vec{n}\, dS$$

Ovviamente al posto di un generico vettore ho messo $\vec{g}$ per ovvi motivi. E' evidente peraltro che le definizioni che troviamo sono valide per un qualunque campo vettoriale.

Quanto vale il flusso totale attraverso la superficie totale? Devo sommare tutti gli infiniti infinitesime di flusso:

$$\sum d\,\Phi(\vec{g})$$

In realtà la somma infinita di infiniti infinitesimi in matematica si chiama integrale ed ha un proprio simbolo:

$$\int d\,\Phi(\vec{g})$$

Si legge integrale esteso a tutta la superficie S di $d\Phi(\vec{g})$

Quindi la definizione del flusso del vettore $\vec{E}$ attraverso la superficie qualunque S è data da:

$$\Phi_S(\vec{g})=\int_S \vec{g}\times\vec{n}\,dS$$

definizione di flusso attraverso una superficie qualunque chiusa

Adesso è semplice trattare la definizione del flusso del vettore $\vec{g}$ attraverso una superficie chiusa S (una superficie chiusa è una sfera, per es., una superficie aperta qualunque può essere pensata come una lamiera ondulata per es.). Non c'è niente da cambiare nella formula, la S che compare sotto il simbolo di integrale è pensata come chiusa. Solo che adesso posso usare una definizione sensata del verso del versore $\vec{n}$: il verso positivo è rivolto verso il fuori della superficie, il verso negativo sarà quello che porta dentro la superficie.

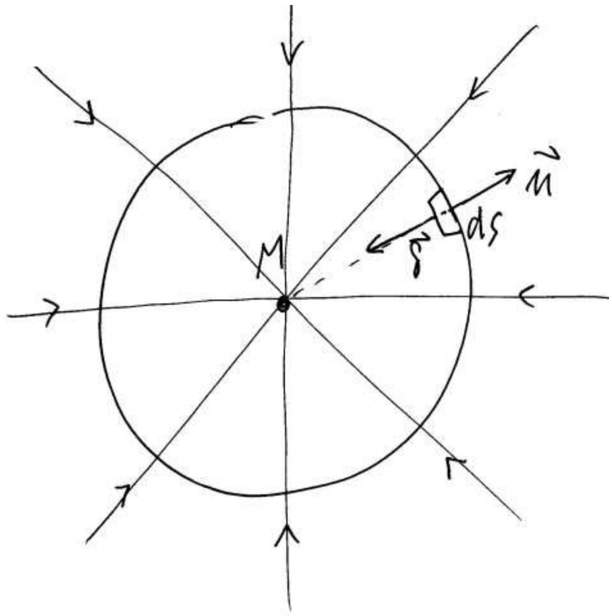
La definizione sarà:

$$\Phi_S(\vec{g})=\int_S \vec{g}\times\vec{n}\,dS$$

applicazione della definizione di flusso di $\vec{g}$ al caso di una carica puntiforme e con una superficie chiusa sferica centrata sulla massa: prima formulazione del teorema di gauss

A che serve tutto questa ansia di definizioni? Per poterci costruire insieme un linguaggio simbolico per ricavarci il teorema di Gauss per il campo gravitazionale. E che ci serve ricavare il teorema di Gauss per il campo gravitazionale? Per poter fare dei conti assai semplici di situazioni con particolari simmetria. Poi, al di là della questione gravitazionale, trattata ad un livello formalmente più elevato di quello che è la trattazione normale, questo ci permetterà di trattare il campo lettricoVedrete, vedrete...

Mettiamoci inizialmente in un caso particolare. Prendiamo una massa puntiforme M che mi genera nello spazio un campo gravitazionale, e prendiamo una superficie sferica ovviamente ideale) che abbia il centro nella massa puntiforme:



Prendiamo l'elemento infinitesimo dS. poiché è un elemento della sfera di raggio r e il campo gravitazionale $\vec{g}$ è radiale (diretto come il raggio), il versore $\vec{n}$ e il campo gravitazionale $\vec{E}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso, allora α , l'angolo formato tra il versore e il campo è 180 e allora il $\cos\alpha$ del prodotto scalare è -1.

Quindi:

$$\vec{g}\times\vec{n}\,dS=-gdS$$

Semplicemente il modulo di g per dS.

Allora il flusso del vettore $\vec{g}$ attraverso la superficie sferica chiusa centrata sulla carica diventa:

$$\Phi_S(\vec{g})=\int\vec{g}\times\vec{n}\,dS=\int gdS=g\int dS$$

Ho portato fuori g perché il modulo del campo elettrico, fissato il raggio è uguale su tutta la superficie sferica S. Ma l'integrale esteso a tutta la superficie S degli infinitesimi dS non è altro che la superficie della sfera. Allora sostituendo al modulo di g la sua espressione e alla superficie della sfera la sua espressione otteniamo:

$$\Phi_S(\vec{g})=\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)}\frac{q}{r^2}4\pi r^2$$

$$\Phi_S(\vec{g})=-G\frac{M}{r^2}4\pi r^2$$

E quindi otteniamo che:

$$\Phi_S(\vec{g})=-4\pi G M$$

Che è il teorema di Gauss.

A breve ulteriori generalizzazioni. La formula del teorema di Gauss sarà la stessa, ma la massa M è tutta la massa contenuta in S e S è una superficie chiusa qualunque