CAPITOLO 1

Come mettere in orbita un satellite geostazionario e vivere felici

1.1. il problema della non caduta

la domanda posta alla classe è la seguente: il satellite geostazionario, lo sappiamo, sta fermo sulla nostra testa. Perché non cade? la domanda non è banale: se io prendo un gessetto e lo lascio andare questo cade. se io mi alzo in piedi sulla sedia, aumentando così la mia distanza dal centro della terra e ripeto l'esperimento il gessetto cade ancora. se io ho un braccio abbastanza lungo (dell'ordine di migliaia di Km) lascio andare il gessetto e questo non cade. Il satellite geostazionario non cade. Perché?

Alcuni hanno risposto che non cade perché lì dove si trova non c'è aria, altri hanno risposto che lì dov'è non c'è la gravità, perché è abbastanza lontano, altri ancora, uno o due, hanno risposto che non sembra ma gira.

E' vera (si fa per dire, ovviamente...) la terza risposta. Il satellite geostazionario in realtà gira.

Anche noi giriamo con la terra ma non ce ne accorgiamo. Se io tengo un gessetto in mano, questo gira con me e con la terra.

Se io prendo un riferimento diverso, ad esempio le stelle fisse, con che velocità si muove il gessetto (e me stesso)?

Facciamo un breve calcolo:

$\omega = \frac{2\pi r}{86400} = \frac{6{,}28 \cdot 6000000}{86400} = 436{,}1 m/s$

cioè stiamo andando a una velocità lineare maggiore di quella del suono. E allora se parlo verso est la mia voce non si sente per quelli che stanno ad est rispetto a me? Mi sentono perfettamente. Cosa c'è allora che non va? E' che il suono si muove a 340 m/s rispetto all'aria. Il suono ha bisogno dell'aria come mezzo di trasporto. L'aria si sta muovendo con noi e con tutta la terra (ve lo immaginate un vento a 436 m/s?) e quindi non c'è effetto sul suono. Ma il gessetto, pur muovendosi così velocemente non sta fermo. Il satellite geostazionario invece non cade. Ma il satellite geostazionario si muove a una velocità mooolto maggiore di quella del gessetto, proprio perché è molto più lontano.

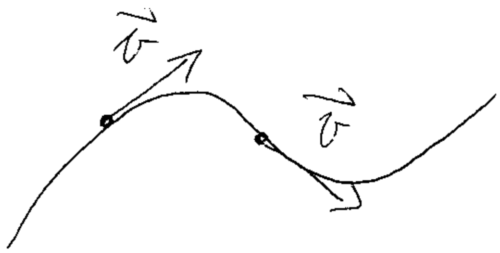
Evidentemente a questo punto abbiamo bisogno di un po' di "background" per poter capire il fenomeno, scrivere delle formule, fare delle previsioni.

1.2. moto circolare uniforme

1.2.1. moto curvilineo e accelerazione. Ricordiamo qui i primi due principi della dinamica:

(1) In assenza di forze esterne il moto di un corpo di massa m è rettilineo uniforme, il vettore velocità $\vec{v}$è costante (se un vettore è costante è costante in modulo, in verso e in direzione, deve conservare tutte e tre le grandezze sue caratteristiche per potersi definire costante...)
(2) In presenza di forze esterne esiste una accelerazione $\vec{a}$ che è proporzionale a $\vec{F}$ ovvero deve valere la formula$\vec{F} = m\vec{a}$ (attenzione: è una legge vettoriale, il che significa che il vettore accelerazione ha lo stesso verso e la stessa direzione del vettore F)

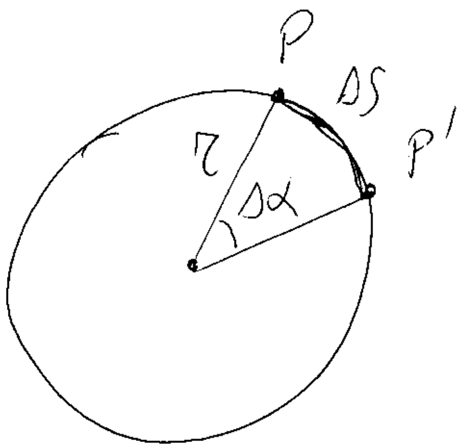
Allora, in base a questi due principi, se io osservo un corpo di massa m che fa una traiettoria curvilinea e non rettilinea, questo vuol dire che agisce una forza esterna sul corpo che lo obbliga a curvare, altrimenti andrebbe diritto per la sua strada (rettilinea). Osserviamo il moto in figura:



Se il modulo della velocità è costante e l'unica variazione presente è quella della direzione, allora vuol dire che esiste una forza perpendicolare al moto, che fa curvare il corpo ma che non varia il modulo della sua velocità, ed essa da origine a una accelerazione perpendicolare al moto che si chiama "accelerazione centripeta". La forza si chiama "forza centripeta". Una forza invece lungo la direzione della velocità da luogo a una accelerazione lungo la velocità, varia il modulo della velocità, ma non la sua direzione, tale forza si chiama "forza tangenziale" e l'accelerazione che subisce il corpo si chiama "accelerazione tangenziale".

Nel moto più generale possibile avremo una forza $\vec{F}(\vec{F}_{parallela}, \vec{F}_{perpendicolare})$che da' origine a una accelerazione $\vec{a}(\vec{a}_{tangenziale}, \vec{a}_{centripeta})$.

1.2.2. moto circolare e velocità angolare. Prendiamo il disco circolare come in figura e supponiamo che ruoti con una certa velocità.



Noi lo vediamo girare più velocemente o meno velocemente ma la velocità (lineare) a cui siamo abituati varia nel disco che ruota: va da zero (il centro del disco) a un massimo (alla periferia del disco). La velocità che avevamo definito non è sufficiente a determinare in modo univoco il moto del disco. Dobbiamo introdurre una nuova grandezza fisica che definisca in modo univoco il moto del disco.

Osserviamo peraltro che l'angolo $\Delta\alpha$spazzato in un certo tempo Δt è lo stesso per tutti i punti. Allora posso definire una nuova grandezza fisica, la velocità angolare, data dalla formula:

$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$

La velocità angolare ωè uguale per tutti i punti del disco.

Ci deve essere evidentemente una relazione che lega la velocità angolare alla velocità lineare. Possiamo ricavarci la relazione in due modi.

Primo modo: la velocità lineare è proporzionale al raggio, aumentando il raggio la velocità lineare aumenta linearmente, quindi:

$v \propto r$

posso sostituire il segno di proporzionalità$\propto$con il segno $=$ a patto di mettere una costante moltiplicativa:

$v = kr$

poi chiamo K velocità angolare e la indico con ωe la mia formula diventa:

$v = \omega r$

che è la relazione cercata. L'unico problema di questa dimostrazione è che io osservo "sperimentalmente" che la velocità è proporzionale al raggio. Potrebbe crescere con una latro tipo di legge, ad es. quadratico, e il ragionamento fatto sopra non varrebbe.

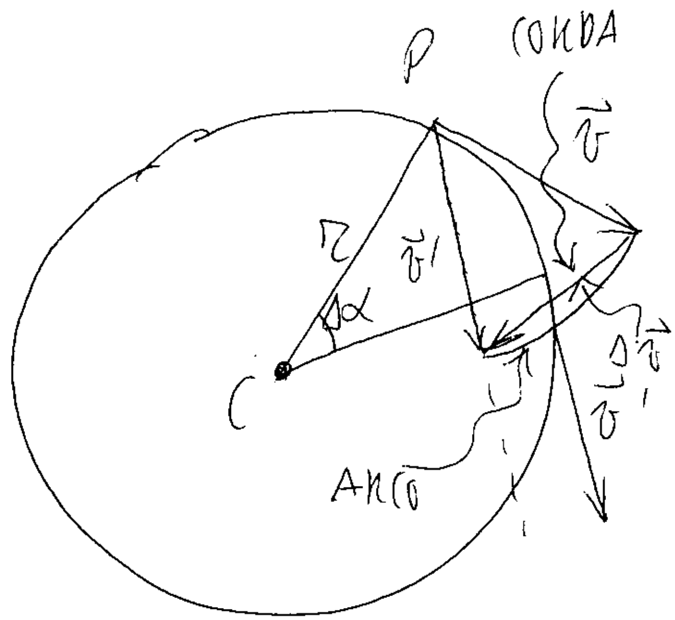
Secondo modo: scriviamo per definizione cosa è la velocità lineare:

$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
ma
$\Delta S = \Delta\alpha \cdot r$ (ricordarsi: la lunghezza di un arco è uguale all'angolo espresso in radianti per il raggio...)
e allora la precedente diventa:
$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha \cdot r}{\Delta t}$
ma per definizione sappiamo che $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$e quindi:
$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha \cdot r}{\Delta t} = \omega r$
che è giustappunto la relazione cercata.

1.2.3. moto circolare uniforme e accelerazione centripeta. Innanzitutto definiamo come moto circolare uniforme un moto in cui $\omega = cost$. Se la velocità angolare è costante il moto è circolare uniforme. Ovviamente, fissato r, distanza dal centro, anche la velocità v lineare alla distanza r dal centro è costante.

Ma se il moto è circolare uniforme esiste una accelerazione del mio corpo che fa la traiettoria circolare? Sicuramente sì, perché il moto è curvilineo e abbiamo visto che in ogni moto curvilineo deve essere presente una accelerazione, perché il modulo di $\vec{v}$non cambia ma la direzione sì. Calcoliamoci adesso questa accelerazione, e poiché il modulo della velocità non cambia abbiamo visto che è sicuramente una accelerazione perpendicolare alla direzione del moto, e si chiamerà dunque accelerazione centripeta.

Osserviamo la figura:



Il corpo si è spostato da P a P', le velocità sono tali per cui:
$|\vec{v}| = |\vec{v}'|$

Posso spostare indietro, parallelamente a se stesso, il vettore $\vec{v}$', fino a portarlo nel punto P. Allora dalla figura si vede subito che $\exists$una variazione di velocità (variazione vettoriale) data da:
$\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v}' - \vec{v}$
e quindi esiste una accelerazione centripeta vettoriale data da:
$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$

Rimane ora da calcolare $\overrightarrow{\Delta v}$, ovvero il suo modulo, mentre la direzione è lungo il raggio della circonferenza e il suo verso è verso il centro (accelerazione centripeta, appunto...).

Se prendiamo un angolo abbastanza piccolo posso confondere la corda, $\overrightarrow{\Delta v}$ con l'arco. Ma per l'arco vale la stessa relazione di prima, sarà l'angolo sotteso per il raggio che questa volta è v, il modulo sia di $\vec{v}$ che di $\vec{v}'$ e quindi:
$|\vec{a}| = a = \frac{\Delta\alpha \cdot v}{\Delta t} = \omega \cdot \omega \cdot r = \omega^2 r$
Perché ci siamo mi ricordati (o forse mi sono ricordato solo io...) che
$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ per definizione e che ci siamo ricavati prima che $v = \omega \cdot r$.

Quindi esiste una accelerazione centripeta diretta secondo il raggio congiungente con il centro e verso il centro, il cui modulo è dato da:

$a = \omega^2 r$